CHRISTIAN BERG

CORPS CONVEXES ET POTENTIELS SPHÉRIQUES

Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab
Matematisk-fysiske Meddelelser **37**, 6

Kommissionær: Munksgaard
København 1969

TABLE DES MATIÈRES

Synopsis

On étudie une théorie du potentiel sur la sphère unité dans l'espace euclidien de q dimensions. Les fonctions propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami pour la valeur propre 1-q jouent le rôle de fonctions harmoniques. Plusieurs théorèmes de la théorie classique du potentiel ont leurs analogues dans cette théorie, par exemple le théorème de représentation de Riesz, disant ici qu'une fonction sousharmonique s'écrit uniquement comme somme d'un potentiel sphérique d'une mesure positive et d'une fonction harmonique.

La fonction d'appui d'un corps convexe est sousharmonique sur la sphère unité, et on trouve que sa partie potentielle est le potentiel de la première mesure de surface du corps, et que sa partie harmonique est déterminée par le point de Steiner du corps. On aboutit à retrouver le théorème classique disant qu'un corps convexe est déterminé à une translation près par sa première mesure de surface, et ce qui est plus intéressant, on obtient une caractérisation des mesures qui peuvent être la première mesure de surface d'un corps convexe.

PRINTED IN DENMARK
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI A/S

Introduction

Il y a 30 ans, que A. D. Aleksandrov [1] et indépendamment W. Fenchel et B. Jessen [7] ont introduit les mesures de surface d'un corps convexe. Depuis ce temps là L. Schwartz a creé la théorie des distributions, et il nous semble naturel d'en faire usage aux problèmes linéaires des corps convexes.

Un problème intéressant, posé dans [1], [7], est la caractérisation des mesures positives sur la sphère unité Ω_q dans $\mathbf{R}^q$, qui peuvent être la mesure de surface p-ième $\mu_p(K)$ d'un corps convexe K dans $\mathbf{R}^q$. La mesure $\mu_p(K)$ est par définition la mesure de surface mixte $\mu(K, \cdots, K, E_q, \cdots, E_q)$, où le corps K est pris p fois, et la boule unité E_q de $\mathbf{R}^q$ est prise $q-1-p$ fois. Pour la définition voir [7] p. 21.

Le cas $p = q-1$ est résolu complètement dans [2], [7], tandis que la réponse pour $p = 1, \cdots, q-2$ est inconnue. Contrairement à la réponse du cas $p = q-1$, où tous les mesures positives, satisfaisant à des conditions trivialement nécessaires, peuvent paraître comme mesures $\mu_{q-1}(K)$, c'est connu depuis longtemps que la classe des mesures $\mu_1(K)$ est beaucoup plus restrictive. Un des buts du présent travail est de donner une condition nécessaire et suffisante, pour qu'une mesure positive soit la première mesure de surface $\mu_1(K)$ d'un corps convexe K. Une condition suffisante mais non nécessaire est donnée par A. V. Pogorelov [16]. Pendant la rédaction finale du présent travail nous avons fait la connaisance de deux travaux de W. J. Firey [8], [9], dont le dernier contient essentiellement la même caractérisation comme la nôtre, mais obtenue dans une manière complètement différente.

La mesure $\mu_1(K)$ dépend linéairement du corps convexe K dans $\mathbf{R}^q$, ou ce qui est équivalent, linéairement de la fonction d'appui h_K de K:

$$\begin{aligned} h_{K+L} &= h_K + h_L, & \mu_1(K+L) &= \mu_1(K) + \mu_1(L), \\ h_{\lambda L} &= \lambda h_L, & \mu_1(\lambda K) &= \lambda \mu_1(K), \end{aligned}$$

pour des corps convexes K, L et $\lambda \geqq 0$.

Ce fait indique, qu'on pourrait espérer de trouver un opérateur différentielle D_q^* sur la sphère unité Ω_q tel que

$$D_q^* h_K = \mu_1(K), \tag{1}$$

au sens de distribution pour tout corps convexe K. Nous allons démontrer, qu'en effet c'est le cas, et que

$$D_q^* = \frac{1}{q-1} \Delta_q^* + 1, \tag{2}$$

où Δ_q^* est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur la sphère unité Ω_q. Dans le cas où K est suffisamment différentiable, la formule (1) s'écrit pour $\xi \in \Omega_q$

$$\sum_{i=1}^{q} \frac{\partial^2 h_K}{\partial x_i^2}(\xi) = \{\Delta_q^* + (q-1)\} h_K(\xi) = R_1(\xi) + \cdots + R_{q-1}(\xi), \tag{3}$$

où $R_1(\xi), \cdots, R_{q-1}(\xi)$ sont les rayons de courbure principaux au point frontière $\operatorname{grad} h_K(\xi)$ de K. La formule (3) est classique, et remonte à E. B. Christoffel pour l'espace ordinaire de trois dimensions.

Il est bien naturel de chercher la formule inverse de (1), c'est-à-dire trouver une fonction de Green g_q de l'opérateur D_q^*. Nous sommes arrivés à démontrer l'existence d'une telle fonction – dans tout le suivant appelée le noyau sphérique – et à calculer g_q explicitement, à cause d'une formule de récursion simple entre g_{q+2} et g_q. En vertu de l'invariance de D_q^* par rapport au groupe $O(q)$ des rotations, le noyau sphérique

$$g_q : \Omega_q \times \Omega_q \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$$

ne dépend que du produit scalaire $\xi \cdot \eta$ des vecteurs $\xi, \eta \in \Omega_q$, et par conséquent g_q est considéré comme fonction sur l'intervalle $[-1,1]$. Alors la formule inverse de (1) peut s'écrire pour $\xi \in \Omega_q$

$$h_K(\xi) = \frac{1}{\|\omega_{q-1}\|} \int_{\Omega_\eta} g_q(\xi \cdot \eta) d\mu_1(K)(\eta) + \mathscr{S}(K) \cdot \xi, \tag{4}$$

où

$$\mathscr{S}(K) = \frac{q}{\|\omega_q\|} \int_{\Omega_\eta} \eta h_K(\eta) d\omega_q(\eta), \tag{5}$$

valable pour tout corps convexe K dans $\mathbf{R}^q$. Ici ω_q désigne la mesure de surface ordinaire sur Ω_q de masse totale $\| \omega_q \|$. Le point $\mathscr{S}(K)$ de $\mathbf{R}^q$ est appelé le point de Steiner [18]. Pendant les dernières années $\mathscr{S}(K)$ a joué un rôle dans des diverses travaux, surtout par G. C. Shephard (cf. B. Grünbaum [10] p. 307).

Les formules (1) et (4) ressemblent au théorème de représentation de F. Riesz dans la théorie du potentiel classique, et en effet ils représentent un cas particulier d'un théorème complètement analogue à celui-là. Nous allons développer une «théorie du potentiel sphérique» qui admet ce «théorème de Riesz». Chez nous g_q va jouer le rôle de r^{-q+2}, et D_q^* le rôle du laplacien. Beaucoup de résultats classiques possèdent des analogues dans cette théorie, citons par exemple le théorème dû à G. C. Evans et à F. Vasilesco (cf. [6] p. 49).

Dans le chapitre 1 nous allons réunir la notation et au convenance du lecteur donner quelques définitions et théorèmes, qui seront souvent utilisés. Dans le chapitre 2 nous allons utiliser la théorie des distributions sur la sphère unité Ω_q, et notre outil le plus important sera le développement d'une distribution en série de fonctions sphériques. Une espèce de produit de convolution entre des fonctions sur l'intervalle $[-1,1]$ et des distributions sur la sphère unité Ω_q nous permet de faire une régularisation des distributions. Dans le chapitre 3 nous allons démontrer l'existence du noyau sphérique g_q, et donner quelques propriétés de g_q, indispensables dans le chapitre 4, qui est consacré à la théorie du potentiel sphérique. Finalement dans le chapitre 5 nous retournons aux corps convexes et prouvons entre autres choses les formules (1) et (4), et la caractérisation promise.

Le présent travail a été commencé sur l'invitation de M. B. Jessen. Au cours de son élaboration, de fructueuses conversations avec lui m'ont bien souvent mis sur la voie. Qu'il veuille trouver ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Chapitre 1

CORPS CONVEXES. NOTATION ET RÉSUMÉ

Dans la suite nous allons considérer l'espace euclidien de q dimensions, noté $\mathbf{R}^q$, et nous nous bornerons aux cas $q \geqq 2$.

Deux ensembles vont jouer un rôle dominant:

$$E_q = \{x \in \mathbf{R}^q \mid \|x\| \leqq 1\}, \text{ la boule unité,}$$

et

$$\Omega_q = \{x \in \mathbf{R}^q \mid \|x\| = 1\}, \text{ la sphère unité.}$$

Quant à la théorie de la mesure, nous allons nous servir de la terminologie du traité de N. Bourbaki [4]. On désigne par $\mathscr{M}(\Omega_q)$ (resp. $\mathscr{M}_+(\Omega_q)$) l'espace des mesures de Radon (resp. mesures de Radon positives) sur Ω_q. L'espace $\mathscr{M}(\Omega_q)$ est le dual de $\mathscr{C}(\Omega_q)$, qui est l'espace de Banach des fonctions continues $f: \Omega_q \to \mathbf{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme

$$\|f\| = \max\{|f(\xi)| \mid \xi \in \Omega_q\}.$$

Dans la suite $\mathscr{M}(\Omega_q)$ est toujours muni de la topologie vague. La mesure de surface ordinaire sur Ω_q est notée ω_q. Elle est invariante par rapport au groupe $O(q)$ des rotations dans $\mathbf{R}^q$, et elle a la masse totale

$$\|\omega_q\| = \frac{2\pi^{\frac{1}{2}q}}{\Gamma(\frac{1}{2}q)}.$$

D'ailleurs elle est uniquement déterminée par ces deux conditions.

Pour une $\mu \in \mathscr{M}_+(\Omega_q)$ et un $p \in [1, \infty]$ l'espace $\mathscr{L}^p(\Omega_q,\mu)$ a le sens ordinaire. Nous écrivons brièvement $\mathscr{L}^p(\Omega_q)$ pour $\mathscr{L}^p(\Omega_q,\omega_q)$, et nous considérons toujours $\mathscr{L}^1(\Omega_q)$ comme un sous-espace de $\mathscr{M}(\Omega_q)$, en vertu du plongement canonique, qui à une fonction $f \in \mathscr{L}^1(\Omega_q)$ attache la mesure

$$\varphi \mapsto \int_{\Omega_q} f(\xi)\varphi(\xi)d\omega_q(\xi).$$

Un corps convexe K dans $\mathbf{R}^q$ sera un ensemble convexe compact non vide de $\mathbf{R}^q$. L'ensemble $\mathscr{C}_q$ des corps convexes dans $\mathbf{R}^q$ est muni d'une structure algébrique

$$K + L = \{x + y | x \in K, y \in L\} \in \mathscr{C}_q, \text{ pour } K, L \in \mathscr{C}_q,$$
$$\lambda K = \{\lambda x | x \in K\} \in \mathscr{C}_q, \text{ pour } K \in \mathscr{C}_q, \ \lambda \geqq 0,$$

et muni d'une structure topologique, définie par la distance de Hausdorff

$$D(K,L) = \inf\{\varepsilon > 0 | K \subseteq L + \varepsilon E_q, L \subseteq K + \varepsilon E_q\}.$$

Les deux opérations algébriques sont continues comme des applications $\mathscr{C}_q \times \mathscr{C}_q \to \mathscr{C}_q$ et $[0, \infty[\times \mathscr{C}_q \to \mathscr{C}_q$. De plus $\mathscr{C}_q$ est un espace localement compact et complet. D'après H. Minkowski on sait que les polyèdres et les corps convexes lisses forment deux ensembles partout denses dans $\mathscr{C}_q$.

Précisons le mot lisse. Un corps convexe lisse $K \in \mathscr{C}_q$ sera pour nous un corps convexe de dimension q (i.e. d'intérieur non vide), dont la frontière ∂K est une variété différentiable de dimension $q-1$; pour tout $\xi \in \Omega_q$ l'hyperplan d'appui de K de normale extérieure ξ rencontre K en un seul point $\Phi_K(\xi)$, et l'application Φ_K sera un difféomorphisme $\Omega_q \to \partial K$.

Tout corps convexe $K \in \mathscr{C}_q$ a un volume $V_q(K)$. D'après H. Minkowski il existe une application V_q: $\mathscr{C}_q^q \to \mathbf{R}$, qui à q corps convexes $K_1, \cdots, K_q$ attache un nombre $V_q(K_1, \cdots, K_q)$, appelé le volume mixte de $K_1, \cdots, K_q$. L'application V_q est multilinéaire et symétrique, et si tous les corps convexes $K_1, \cdots, K_q$ sont égaux à K, on a $V_q(K, \cdots, K) = V_q(K)$. D'ailleurs il n'est pas difficile de voir que ces trois propriétés déterminent l'application V_q uniquement. Concernant le volume mixte voir [3] p. 38.

Pour tout $K \in \mathscr{C}_q$ on introduit la fonction d'appui h_K: $\mathbf{R}^q \to \mathbf{R}$, donnée par la formule

$$h_K(x) = \sup_{y \in K} (x \cdot y),$$

où $x \cdot y$ désigne le produit scalaire de x et y. Toute fonction d'appui h_K vérifie

$$\text{(a)} \quad h_K(x+y) \leqq h_K(x) + h_K(y)$$

et

$$\text{(b)} \quad h_K(\lambda x) = \lambda h_K(x), \qquad \text{si } \lambda \geqq 0,$$

ce qui montre que h_K est convexe, et par conséquent continue. Inversement, toute fonction $\mathbf{R}^q \to \mathbf{R}$ satisfaisant aux conditions (a) et (b) est la fonction d'appui d'un corps convexe et d'un seul.

Grâce à la condition (b), on ne perd pas de l'information en considérant la fonction d'appui seulement sur Ω_q, c'est-à-dire comme élément de l'espace de Banach $\mathscr{C}(\Omega_q)$. Il est bien connu que l'application $\mathscr{C}_q \to \mathscr{C}(\Omega_q)$, donnée par $K \mapsto h_K$, possède les propriétés suivantes:

(i) $K \subseteq L$ si et seulement si $h_K \leqq h_L$, pour $K,L \in \mathscr{C}_q$.

(ii) $h_{K+L} = h_K + h_L$, $h_{\lambda K} = \lambda h_K$, pour $K,L \in \mathscr{C}_q, \lambda \geqq 0$.

(iii) $D(K,L) = \|h_K - h_L\|$, pour $K,L \in \mathscr{C}_q$.

(iv) $h_{\mathrm{conv}(K \cup L)} = \max(h_K, h_L)$, pour $K,L \in \mathscr{C}_q$.

On en déduit que l'ensemble des fonctions d'appui forme un cône convexe réticulé $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{C}(\Omega_q)$, et que $\mathscr{H} - \mathscr{H}$ est un espace de Riesz, qui de plus contient les fonctions constantes et sépare les points de Ω_q. D'après le théorème de Weierstrass-Stone, $\mathscr{H} - \mathscr{H}$ est partout dense dans $\mathscr{C}(\Omega_q)$, c'est-à-dire $\mathscr{H}$ est un cône convexe total de $\mathscr{C}(\Omega_q)$. Cette observation est très utile, et peut servir à l'introduction des mesures de surface mixtes de $q-1$ corps convexes dans $\mathbf{R}^q$. Pour nous il suffit de connaître la première mesure de surface $\mu_1(K)$ d'un corps convexe K, définie comme la mesure de surface mixte $\mu(K,E_q,\cdots,E_q)$ de K, et de E_q prise $q-2$ fois. Cette mesure est caractérisée de la manière suivante:

PROPOSITION 1.1. *Soit* $K \in \mathscr{C}_q$. *Il existe une mesure positive* $\mu_1(K)$ *sur* Ω_q *et une seule telle que, pour tout corps convexe* $L \in \mathscr{C}_q$

$$V_q(L,K,\underbrace{E_q,\cdots,E_q}_{q-2}) = \frac{1}{q}\int_{\Omega_q} h_L(\xi)d\mu_1(K)(\xi).$$

Démonstration: L'unicité résulte de la totalité du cône convexe $\mathscr{H}$ des fonctions d'appui. Pour voir l'existence nous considérons l'application $\mathscr{H} \to \mathbf{R}$, donnée par

$$h_L \mapsto qV_q(L,K,E_q,\cdots,E_q).$$

Elle est linéaire et croissante à cause des propriétés du volume mixte. Cela entraîne que le prolongement par linéarité au sous-espace $\mathscr{H}-\mathscr{H}$ est une forme linéaire positive. Un prolongement par continuité donne la mesure désirée. /

Dans la proposition suivante nous allons résumer les propriétés de la mesure $\mu_1(K)$. Elles se déduisent facilement de ce qui est connu sur le volume mixte (cf. [7] §§ 5, 6).

PROPOSITION 1.2. (i) *La mesure* $\mu_1(K)$ *est indépendante de translations de* K, *c'est-à-dire* $\mu_1(K+a) = \mu_1(K)$ *pour* $a \in \mathbf{R}^q$.

(ii) *La mesure* $\mu_1(K)$ *admet* 0 *pour barycentre, c'est-à-dire*

$$\int_{\Omega_q} \xi d\mu_1(K)(\xi) = 0$$

(iii) *L'application* $\mu_1\colon \mathscr{C}_q \to \mathscr{M}_+(\Omega_q)$ *est linéaire et continue.*

(iv) *Si* K *est un corps convexe lisse, la mesure* $\mu_1(K)$ *possède une densité par rapport à la mesure* ω_q, *plus précisément*

$$\mu_1(K) = \frac{R_1(\xi)+\cdots+R_{q-1}(\xi)}{q-1}\,\omega_q,$$

où $R_1(\xi),\cdots,R_{q-1}(\xi)$ *sont les rayons de courbure principaux au point frontière* grad $h_K(\xi)$ *de* K, *où la normale extérieure est* ξ.

De plus pour un corps convexe lisse K, d'après [3] p. 62, on a

$$\Delta_q h_K(\xi) = \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial^2 h_K}{\partial x_i^2}(\xi) = R_1(\xi) + \cdots + R_{q-1}(\xi),$$

donc

$$\Delta_q h_K = (q-1)\mu_1(K), \tag{1}$$

où nous avons identifié la mesure et sa densité par rapport à ω_q.

Chapitre 2

SUR LE DÉVELOPPEMENT D'UNE DISTRIBUTION EN SÉRIE DE FONCTIONS SPHÉRIQUES

§ 1. *La théorie des distributions sur Ω_q*

La sphère unité Ω_q est une variété différentiable de dimension $q-1$, possédant une base dénombrable d'ensembles ouverts. Selon [17] on peut introduire les espace vectoriels topologiques fondamentaux de la théorie des distributions, traditionellement notés $\mathscr{D}, \mathscr{D}', \mathscr{E}, \mathscr{E}'$, sur une telle variété. La compacité de Ω_q entraîne que $\mathscr{D} = \mathscr{E}$ et $\mathscr{D}' = \mathscr{E}'$. L'espace vectoriel topologique $\mathscr{D} = \mathscr{D}(\Omega_q)$ est l'ensemble $C^\infty(\Omega_q)$ des fonctions indéfiniment dérivables $\Omega_q \to \mathbf{R}$ muni d'une topologie convenable. Pour la définition de cette topologie et ses propriétés voir [17] § 9; mentionnons seulement que $\mathscr{D}(\Omega_q)$ est un espace de Fréchet.

L'espace dual topologique $\mathscr{D}'(\Omega_q)$ forme l'espace des distributions sur Ω_q. On le munit de la topologie faible de la dualité.

Dans la théorie des distributions de $\mathbf{R}^q$, on utilise fréquemment le produit de convolution, quand il s'agit d'approximer une fonction par une fonction indéfiniment dérivable. On pourrait croire, qu'on allait perdre ce procédé d'approximation ici, parce qu'il est lié à la structure de groupe de $\mathbf{R}^q$. Il y a cependant dans ce cas simple un procédé, qui ressemble au produit de convolution, et qui nous donne des résultats ressemblants à ceux du cas classique $\mathbf{R}^q$.

Soit $(\psi_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0,1[}$ une unité approchée dans l'algebre de Banach $\mathscr{L}^1(\mathbf{R}^q)$ telle que

(i) $\psi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbf{R}^q)$,

(ii) $\psi_\varepsilon \geqq 0$, $\operatorname{supp}\psi_\varepsilon \subseteq \{x \in \mathbf{R}^q \mid \|x\| \leqq \varepsilon\}$,

(iii) $\psi_\varepsilon(x) = \psi_\varepsilon(y)$, si $\|x\| = \|y\|$,

(iv) $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^q} \psi_\varepsilon(x)dx = 1$.

On définit $\chi_\varepsilon : \Omega_q \times \Omega_q \to \mathbf{R}$ par

$$\chi_\varepsilon(\xi,\eta) = \|\omega_{q-1}\| \int_0^\infty \psi_\varepsilon(\xi - r\eta) r^{q-1} dr.$$

En effet il suffiit de faire l'intégration sur l'intervalle $[0,2]$, parce que si $r \geqq 2$ et $\xi,\eta \in \Omega_q$, on a

$$\|\xi - r\eta\| \geqq |r-1| \geqq 1.$$

Ceci montre que $\chi_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_q \times \Omega_q)$. De plus on a

$$\|\xi - r\eta\|^2 = 1 + r^2 - 2r(\xi\cdot\eta),$$

donc $\chi_\varepsilon(\xi,\eta)$ ne dépend que de $\xi\cdot\eta$. Si $\xi\cdot\eta = t$, nous écrivons

$$\varphi_\varepsilon(t) = \varphi_\varepsilon(\xi\cdot\eta) = \chi_\varepsilon(\xi,\eta) = \|\omega_{q-1}\| \int_0^\infty \psi_\varepsilon(\xi - r\eta) r^{q-1} dr. \tag{1}$$

DÉFINITION: *La famille $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1[}$ est appelée une unité approchée de Ω_q, provenue de l'unité approchée $(\psi_\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1[}$ de $\mathscr{L}^1(\mathbf{R}^q)$ par la formule* (1).

PROPOSITION 2.1. *L'unité approchée $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1[}$ de Ω_q possède les propriétés suivantes:*

(i) *Pour tout $\xi \in \Omega_q$ la fonction $\eta \to \varphi_\varepsilon(\xi\cdot\eta)$ de Ω_q dans $\mathbf{R}$ est indéfiniment dérivable. De même $\varphi_\varepsilon : [-1,1] \to \mathbf{R}$ est indéfiniment dérivable.*

(ii) $\varphi_\varepsilon \geqq 0$, $\operatorname{supp} \varphi_\varepsilon \subseteq [(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}, 1]$.

(iii) *Pour tout $\xi \in \Omega_q$ on a*

$$\int_{\Omega_\eta} \varphi_\varepsilon(\xi\cdot\eta) d\omega_q(\eta) = \|\omega_{q-1}\|,$$

donc

(iv) $$\int_{-1}^{1} \varphi_\varepsilon(t)(1-t^2)^{\frac{1}{2}(q-3)} dt = 1.$$

Démonstration: Remarquons à (ii) que si $\varphi_\varepsilon(\xi\cdot\eta) > 0$, il existe un $r > 0$ tel que $\|\xi - r\eta\| < \varepsilon$, d'où

$$1 + r^2 - 2r(\xi\cdot\eta) < \varepsilon^2.$$

Cela entraîne d'une part que $\xi\cdot\eta \geqq 0$, d'autre part que $1 - (\xi\cdot\eta)^2 < \varepsilon^2$, parce que $1 + r^2 - 2r(\xi\cdot\eta)$ a la valeur minimale $1 - (\xi\cdot\eta)^2$. En tout on a $\xi\cdot\eta > (1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}$.

La vérification de (iii) est facile:

$$\int_{\Omega_q} \varphi_\varepsilon(\xi \cdot \eta) d\omega_q(\eta) = \|\omega_{q-1}\| \int_{\Omega_q} \left(\int_0^\infty \psi_\varepsilon(\xi - r\eta) r^{q-1} dr \right) d\omega_q(\eta) =$$

$$\|\omega_{q-1}\| \int_{\mathbf{R}^q} \psi_\varepsilon(\xi - x) dx = \|\omega_{q-1}\| \int_{\mathbf{R}^q} \psi_\varepsilon(x) dx = \|\omega_{q-1}\|,$$

et (iv) est une conséquence immédiate de (iii). /

DÉFINITION: *Soit* $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0,1[}$ *une unité approchée de* Ω_q *comme donnée ci-dessus. Pour* $F \in \mathscr{L}^1(\Omega_q)$, $\mu \in \mathscr{M}(\Omega_q)$, $T \in \mathscr{D}'(\Omega_q)$, *nous posons pour* $\xi \in \Omega_q$

$$\varphi_\varepsilon * F(\xi) = \frac{1}{\|\omega_{q-1}\|} \int_{\Omega_q} \varphi_\varepsilon(\xi \cdot \eta) F(\eta) d\omega_q(\eta),$$

$$\varphi_\varepsilon * \mu(\xi) = \frac{1}{\|\omega_{q-1}\|} \int_{\Omega_q} \varphi_\varepsilon(\xi \cdot \eta) d\mu(\eta),$$

$$\varphi_\varepsilon * T(\xi) = \frac{1}{\|\omega_{q-1}\|} \underset{\eta}{T}(\varphi_\varepsilon(\xi \cdot \eta)).$$

Alors $\varphi_\varepsilon * X$ *est une fonction* $\Omega_q \to \mathbf{R}$ *appelée le produit de convolution de* φ_ε *et* X, *ou la régularisée de* X.

Le principe de la régularisation dit que $\varphi_\varepsilon * X$ est indéfiniment dérivable et une bonne approximation à X.

Précisions ce principe par la proposition suivante.

PROPOSITION 2.2. *Soit* E *un des espaces* $\mathscr{D}(\Omega_q)$, $\mathscr{C}(\Omega_q)$, $\mathscr{L}^1(\Omega_q)$. *Alors, pour toute* $F \in E$, *on a* $\varphi_\varepsilon * F \in C^\infty(\Omega_q) \subseteq E$ *et* $\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi_\varepsilon * F = F$ *dans l'espace* E.

Démonstration: Si $F \in \mathscr{L}^1(\Omega_q)$ on déduit que $\varphi_\varepsilon * F \in C^\infty(\Omega_q)$ à l'aide d'un théorème sur la dérivation sous le signe d'intégration.

(i) *Soit* $E = \mathscr{D}(\Omega_q)$. La démonstration ne se déroule pas, comme on pourrait le croire, par analogie avec la proposition correspondante de $\mathbf{R}^q$. La cause en est qu'on ne peut pas changer les rôles de φ_ε et F comme dans le produit de convolution ordinaire. On se débrouille de la manière suivante. Prolongeons F à toute $\mathbf{R}^q$ en posant

$$F(0) = 0, \quad \text{et} \quad F(x) = F\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \text{ si } x \neq 0.$$

Alors $F \in C^{\infty}(\mathbf{R}^q \setminus \{0\})$. Soit $(\psi_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0,1[}$ l'unité approchée de $\mathscr{L}^1(\mathbf{R}^q)$ de laquelle $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0,1[}$ provient. Pour le produit de convolution ordinaire

$$\psi_\varepsilon * F(x) = \int_{\mathbf{R}^q} F(y)\psi_\varepsilon(x-y)dy = \int_{\mathbf{R}^q} \psi_\varepsilon(y)F(x-y)dy$$

nous savons que $\psi_\varepsilon * F \in C^{\infty}(\mathbf{R}^q)$ et $\lim_{\varepsilon \to 0} \psi_\varepsilon * F = F$ dans l'espace $\mathscr{E}(\mathbf{R}^q \setminus \{0\})$, i.e. chacune des dérivées partielles de $\psi_\varepsilon * F$ converge vers la dérivée partielle correspondante de F, uniformément sur tout compact de $\mathbf{R}^q \setminus \{0\}$. Cela entraîne $\lim_{\varepsilon \to 0} \psi_\varepsilon * F = F$ dans l'espace $\mathscr{D}(\Omega_q)$. Calculons maintenant $\psi_\varepsilon * F(\xi)$ pour un $\xi \in \Omega_q$:

$$\psi_\varepsilon * F(\xi) = \int_{\mathbf{R}^q} F(y)\psi_\varepsilon(\xi - y)dy = \int_{\Omega_q}\left(\int_0^\infty F(r\eta)\psi_\varepsilon(\xi - r\eta)r^{q-1}dr\right)d\omega_q(\eta)$$

$$= \frac{1}{\|\omega_{q-1}\|}\int_{\Omega_q} F(\eta)\varphi_\varepsilon(\xi\cdot\eta)d\omega_q(\eta) = \varphi_\varepsilon * F(\xi),$$

d'après la formule (1).

(ii) *Soit* $E = \mathscr{C}(\Omega_q)$. En vertu de la formule

$$|F(\xi) - \varphi_\varepsilon * F(\xi)| \leqq \frac{1}{\|\omega_{q-1}\|}\int_{\Omega_q} \varphi_\varepsilon(\xi\cdot\eta)|F(\xi) - F(\eta)|d\omega_q(\eta),$$

nous concluons à l'aide de la continuité uniforme de F que $\varphi_\varepsilon * F(\xi) \to F(\xi)$, uniformément sur Ω_q pour $\varepsilon \to 0$.

Par conséquent nous avons aussi $\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi_\varepsilon * F = F$ dans $\mathscr{L}^1(\Omega_q)$.

(iii) *Soit* $E = \mathscr{L}^1(\Omega_q)$. Grâce au théorème de Fubini, on a pour tout $\varepsilon \in]0,1[$

$$\|\varphi_\varepsilon * F\|_1 \leqq \|F\|_1.$$

Pour $\delta > 0$ donné on choisit $G \in \mathscr{C}(\Omega_q)$ telle que $\|F - G\|_1 < \frac{1}{3}\delta$. Donc

$$\|F - \varphi_\varepsilon * F\|_1 \leqq \tfrac{2}{3}\delta + \|G - \varphi_\varepsilon * G\|_1 < \delta,$$

dès que ε est suffisamment petit. /

De cette proposition résulte que $\mathscr{D}(\Omega_q)$ est partout dense dans $\mathscr{C}(\Omega_q)$, ce qui nous permet de considérer les mesures $\mathscr{M}(\Omega_q)$ comme un sous-espace des distributions $\mathscr{D}'(\Omega_q)$. Par conséquent on a les plongements $\mathscr{L}^1(\Omega_q) \subseteq \mathscr{M}(\Omega_q) \subseteq \mathscr{D}'(\Omega_q)$. Une fonction $f \in \mathscr{L}^1(\Omega_q)$ s'identifie avec la distribution

$$\varphi \mapsto \int_{\Omega_q} f(\xi)\varphi(\xi)d\omega_q(\xi).$$

On remarque que les trois définitions de la régularisée sont compatibles avec ces plongements.

Une distribution $T \in \mathscr{D}'(\Omega_q)$ est dite positive, si pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega_q)$, $\varphi \geqq 0$, on a $T(\varphi) \geqq 0$.

PROPOSITION 2.3. *Après le plongement $\mathscr{M}(\Omega_q) \subseteq \mathscr{D}'(\Omega_q)$ il y a identité entre les mesures positives $\mathscr{M}_+(\Omega_q)$ et les distributions positives $\mathscr{D}'_+(\Omega_q)$.*

Démonstration: Trivialement $\mathscr{M}_+(\Omega_q) \subseteq \mathscr{D}_+(\Omega_q)$. Inversement, soient T une distribution positive, $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega_q)$. Puisque

$$-\|\varphi\| \leqq \varphi \leqq \|\varphi\|,$$

on a

$$-\|\varphi\|T(1) \leqq T(\varphi) \leqq \|\varphi\|T(1),$$

donc

$$|T(\varphi)| \leqq \|\varphi\|T(1).$$

Il en découle que T est continue sur $\mathscr{D}(\Omega_q)$ muni de la topologie induite par celle de $\mathscr{C}(\Omega_q)$. Alors T se prolonge uniquement par continuité en une mesure sur Ω_q, encore notée T, et T est une mesure positive, car si $\varphi \in \mathscr{C}(\Omega_q)$, $\varphi \geqq 0$, on a

$$\varphi_\varepsilon * \varphi \in \mathscr{D}(\Omega_q), \qquad \varphi_\varepsilon * \varphi \geqq 0,$$

donc

$$T(\varphi_\varepsilon * \varphi) \geqq 0.$$

Faisons $\varepsilon \to 0$, d'après la proposition 2.2 $\varphi_\varepsilon * \varphi \to \varphi$ dans l'espace $\mathscr{C}(\Omega_q)$, d'où

$$T(\varphi_\varepsilon * \varphi) \to T(\varphi),$$

et par suite

$$T(\varphi) \geqq 0. /$$

Nous allons utiliser le produit tensoriel de distributions. Pour les détails voir [17] théorèmes 9, 10; citons seulement la proposition suivante.

PROPOSITION 2.4. *Soient $S,T \in \mathscr{D}'(\Omega_q)$, $\varphi \in C^\infty(\Omega_q \times \Omega_q)$. Les applications $\xi \mapsto T_\eta(\varphi(\xi,\eta))$ et $\eta \mapsto S_\xi(\varphi(\xi,\eta))$ sont indéfinement dérivables sur Ω_q. De plus*

$$\underset{\xi}{S}(\underset{\eta}{T}(\varphi(\xi,\eta))) = \underset{\eta}{T}(\underset{\xi}{S}(\varphi(\xi,\eta))). \tag{2}$$

Cette formule détermine une distribution sur $\Omega_q \times \Omega_q$, appelée le produit tensoriel de S et T, et elle est notée $S \times T$.

Voici un autre exemple du principe de la régularisation:

PROPOSITION 2.5. *Soit $T \in \mathscr{D}'(\Omega_q)$. Alors $\varphi_\varepsilon * T \in C^\infty(\Omega_q)$, et $\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi_\varepsilon * T = T$ dans $\mathscr{D}'(\Omega_q)$, i.e. faiblement au sens des distributions.*

Démonstration: La proposition 2.4 montre que $\varphi_\varepsilon * T \in C^\infty(\Omega_q)$. La fonction $\xi \to 1$ est une distribution, et une application de la formule (2) au produit tensoriel $1 \times T$ et à la fonction $(\xi,\eta) \mapsto \varphi_\varepsilon(\xi\cdot\eta)\varphi(\xi)$, où $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega_q)$, donne

$$\int_{\Omega_q} \underset{\eta}{T}(\varphi_\varepsilon(\xi\cdot\eta)\varphi(\xi))d\omega_q(\xi) = \underset{\eta}{T}\Big(\int_{\Omega_q} \varphi_\varepsilon(\xi\cdot\eta)\varphi(\xi)d\omega_q(\xi)\Big),$$

d'où

$$\int_{\Omega_q} \varphi(\xi)\varphi_\varepsilon * T(\xi)d\omega_q(\xi) = \underset{\eta}{T}(\varphi_\varepsilon * \varphi(\eta)).$$

Si nous interprétons $\varphi_\varepsilon * T$ comme distribution, nous venons de voir que

$$\varphi_\varepsilon * T(\varphi) = T(\varphi_\varepsilon * \varphi).$$

Si $\varepsilon \to 0$, il résulte de la proposition 2.2 que

$$\varphi_\varepsilon * T(\varphi) \to T(\varphi),$$

valable pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega_q)$. /

§ 2. L'opérateur Δ_q^* de Laplace-Beltrami sur Ω_q

Dans le suivant Δ_q^* désigne l'opérateur de Laplace-Beltrami sur Ω_q (cf. [11] p. 387), et Δ_q désigne le laplacien ordinaire dans q variables. Résumons quelques faits, nécessaires pour ce qui suit.

PROPOSITION 2.6. *Si $x \in \mathbf{R}^q \setminus \{0\}$, on pose $x = r\xi$, où $r = \|x\| \in]0, \infty[$ et $\xi = x/\|x\| \in \Omega_q$. Alors on a*

$$\Delta_q = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{q-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_q^*. \tag{3}$$

Si $a \in \Omega_q$, on pose $\Omega_{q-1} = \{\eta \in \Omega_q \,|\, a\cdot\eta = 0\}$, et on obtient la description paramétrique suivante de $\Omega q \setminus \{a, -a\}$:

$$\xi = ta + (1 - t^2)^{\frac{1}{2}}\eta, \quad \text{où} \quad t \in]-1,1[, \eta \in \Omega_{q-1}.$$

Alors on a (si $q \geqq 3$)

$$\Delta_q^* = (1 - t^2)\frac{\partial^2}{\partial t^2} - (q-1)t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{1-t^2}\Delta_{q-1}^*. \tag{4}$$

Pour toutes $\varphi, \psi \in C^2(\Omega_q)$, on a

$$\int_{\Omega_q} \varphi(\xi)\Delta_q^*\psi(\xi)d\omega_q(\xi) = \int_{\Omega_q} \Delta_q^*\varphi(\xi)\psi(\xi)d\omega_q(\xi). \tag{5}$$

Pour tout $A \in O(q)$ et toute $\varphi \in C^2(\Omega_q)$, on a

$$\Delta_q^*(\varphi \circ A) = (\Delta_q^*\varphi)\circ A. \tag{6}$$

Démonstration: Les formules (3), (4) résultent de l'expression dans des coordonnées locales de Δ_q^* (cf. [15] p. 38), et (5), (6) sont des cas particuliers d'un théorème général sur les variétés de Riemann (cf. [11] p. 387). Nous allons obtenir (5) comme corrollaire du théorème 4.3. /

Soit h_K la fonction d'appui d'un corps convexe lisse K. Puisque pour $r > 0$, $\xi \in \Omega_q$,

$$h_K(r\xi) = rh_K(\xi),$$

la formule (3) donne

$$\Delta_q h_K(r\xi) = \frac{q-1}{r}h_K(\xi) + \frac{1}{r}\Delta_q^* h_K(\xi).$$

Si $r = 1$, on a

$$\Delta_q h_K(\xi) = \{\Delta_q^* + (q-1)\}h_K(\xi), \quad \text{pour} \quad \xi \in \Omega_q. \tag{7}$$

D'après (1) chapitre 1 nous avons

$$\left\{\frac{1}{q-1}\Delta_q^* + 1\right\}h_K = \mu_1(K). \tag{8}$$

Pour des raisons de commodité nous posons

$$D_q^* = \frac{1}{q-1}\Delta_q^* + 1, \tag{9}$$

donc, pour tout corps convexe lisse K, on a

$$D_q^* h_K = \mu_1(K). \tag{10}$$

L'opérateur Δ_q^* est une application linéaire continue $\mathscr{D}(\Omega_q) \to \mathscr{D}(\Omega_q)$. La continuité résulte des faits que Δ_q^* applique un ensemble borné de $\mathscr{D}(\Omega_q)$ sur un ensemble borné, et que $\mathscr{D}(\Omega_q)$ est un espace de Fréchet et par conséquent bornologique. L'application ${}^t\Delta_q^*$, transposée de Δ_q^*, est alors une application linéaire continue $\mathscr{D}'(\Omega_q) \to \mathscr{D}'(\Omega_q)$, donnée par

$$ {}^t\Delta_q^* T(\psi) = T(\Delta_q^*\psi), \quad \text{pour des } T \in \mathscr{D}'(\Omega_q),\ \psi \in \mathscr{D}(\Omega_q). $$

Pour une $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega_q)$ considérée comme distribution, on a pour toute $\psi \in \mathscr{D}(\Omega_q)$

$$ {}^t\Delta_q^*\varphi(\psi) = \varphi(\Delta_q^*\psi) = \int_{\Omega_q} \varphi(\xi)\Delta_q^*\psi(\xi)d\omega_q(\xi) = \int_{\Omega_q} \Delta_q^*\varphi(\xi)\psi(\xi)d\omega_q(\xi) = \Delta_q^*\varphi(\psi). $$

Donc, l'application ${}^t\Delta_q^*$ *est une extension de* Δ_q^* *de* $\mathscr{D}(\Omega_q)$ *à* $\mathscr{D}'(\Omega_q)$. *Dorénavant nous considérons toujours l'opérateur de Laplace-Beltrami* Δ_q^* *comme un opérateur dans l'espace* $\mathscr{D}'(\Omega_q)$. *Ces observations sont valables aussi pour l'opérateur* $D_q^* = \frac{1}{q-1}\Delta_q^* + 1$. *Remarquons de plus que* (5), (6) *subsistent encore, si* Δ_q^* *est remplacé par* D_q^*.

§ 3. Le produit de convolution

La fonction régularisée $\varphi_\varepsilon * X$ de § 1 est un produit de convolution. Dans ce paragraphe nous allons considérer des produits de convolution $F * G$ plus généraux. Sur l'intervalle $[-1,1]$ nous considérons la mesure $(1-t^2)^{\frac{1}{2}(q-3)}\,dt$, $q \geqq 2$, qui donne les espaces

$$ \mathscr{L}^p([-1,1],(1-t^2)^{\frac{1}{2}(q-3)}dt) = \mathscr{L}^p([-1,1],q) $$

pour $p \in [1, \infty]$. Nous posons $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty,\infty\}$.

PROPOSITION 2.7. *Soit* $f\colon [-1,1] \to \bar{\mathbf{R}}$ *une fonction borélienne appartenant à* $\mathscr{L}^1([-1,1],q)$, *et soit* ξ *un point de* Ω_q. *Alors la fonction* $f(\xi\cdot\ )\colon \Omega_q \to \bar{\mathbf{R}}$ *donnée par* $\eta \mapsto f(\xi\cdot\eta)$ *est borélienne et appartient à* $\mathscr{L}^1(\Omega_q)$. *De plus*

$$ \frac{1}{\|\omega_{q-1}\|}\int_{\Omega_q} f(\xi\cdot\eta)d\omega_q(\eta) = \int_{-1}^{1} f(t)(1-t^2)^{\frac{1}{2}(q-3)}\,dt, $$

et l'application $\Omega_q \to \mathscr{L}^1(\Omega_q)$ *donnée par* $\xi \mapsto f(\xi\cdot\ )$ *est continue.*

Démonstration: L'application $\eta \mapsto f(\xi\cdot\eta)$ est trivialement borélienne. Alors

$$\frac{1}{||\omega_{q-1}||}\int_{\Omega_q}|f(\xi\cdot\eta)|d\omega_q(\eta) = \int_{-1}^{1}|f(t)|(1-t^2)^{\frac{1}{2}(q-3)}\,dt < \infty,$$

d'où $f(\xi\cdot\ )\in\mathscr{L}^1(\Omega_q)$, et on voit que la formule donnée est valable. La continuité de l'application $\xi\mapsto f(\xi\cdot\ )$ se déduit ainsi: Soit $\varepsilon > 0$. On choisit une $g\in\mathscr{C}([0,1])$ telle que

$$||\omega_{q-1}||\int_{-1}^{1}|f(t)-g(t)|(1-t^2)^{\frac{1}{2}(q-3)}\,dt < \tfrac{1}{3}\varepsilon.$$

Alors

$$||f(\xi\cdot\ )-f(\zeta\cdot\ )||_1 < \tfrac{2}{3}\varepsilon + ||g(\xi\cdot\ )-g(\zeta\cdot)||_1 < \varepsilon,$$

dès que ζ est suffisamment voisin à ξ, en vertu de la continuité uniforme de g. /

DÉFINITION DU PRODUIT DE CONVOLUTION. *Soient f une fonction borélienne de $\mathscr{L}^1([-1,1],q)$, $\mu\in\mathscr{M}(\Omega_q)$. Nous posons*

$$f*\mu(\xi) = \frac{1}{||\omega_{q-1}||}\int_{\Omega_q}f(\xi\cdot\eta)d\mu(\eta).$$

Si $F\in\mathscr{L}^1(\Omega_q)$ nous avons identifié F et la mesure $Fd\omega_q$, et nous écrivons simplement $f*F$ au lieu de $f*Fd\omega_q$, i.e.

$$f*F(\xi) = \frac{1}{||\omega_{q-1}||}\int_{\Omega_q}f(\xi\cdot\eta)F(\eta)d\omega_q(\eta).$$

Soient $\varphi\in C^\infty([-1,1])$, $T\in\mathscr{D}'(\Omega_q)$; nous posons

$$\varphi*T(\xi) = \frac{1}{||\omega_{q-1}||}\underset{\eta}{T}(\varphi(\xi\cdot\eta)).$$

PROPOSITION 2.8. *Par la notation ci-dessus $f*\mu$ est définie ω_q-presque partout et appartient à $\mathscr{L}^1(\Omega_q)$, et $\varphi*T$ appartient à $C^\infty(\Omega_q)$.*

Démonstration: L'application $(\xi,\eta)\mapsto f(\xi\cdot\eta)$ est trivialement borélienne. Grâce au théorème de Fubini on a

$$\int_{\Omega_q \times \Omega_q} |f(\xi\cdot\eta)| d\omega_q \times |\mu|(\xi,\eta) = \int_{\Omega_q}\left(\int_{\Omega_q} |f(\xi\cdot\eta)| d\omega_q(\xi)\right) d|\mu|(\eta)$$

$$= \|\omega_{q-1}\| \int_{\Omega_q}\left(\int_{-1}^{1} |f(t)|(1-t^2)^{\frac{1}{2}(q-3)}\, dt\right) d|\mu|(\eta) = \|\omega_{q-1}\|\,\|\mu\| \int_{-}^{1} |f(t)|(1-t^2)^{\frac{1}{2}(q-3)}\, dt < \infty,$$

d'où $f(\xi\cdot\eta) \in \mathscr{L}^1(\Omega_q \times \Omega_q, \omega_q \times |\mu|)$, ce qui entraîne l'assertion. Que $\varphi * T \in C^\infty(\Omega_q)$, résulte de la proposition 2.4. /

PROPOSITION 2.9. *Soient f une fonction borélienne de $\mathscr{L}^1([-1,1],q)$, $F \in \mathscr{L}^\infty(\Omega_q)$. Alors $f * F$ est partout définie, et elle est continue.*

Démonstration: Pour tout $\xi \in \Omega_q$ on a

$$\frac{1}{\|\omega_{q-1}\|}\int_{\Omega_q} |f(\xi\cdot\eta)F(\eta)| d\omega_q(\eta) \leqq \|F\|_\infty \int_{-1}^{1} |f(t)|(1-t^2)^{\frac{1}{2}(q-3)} dt < \infty,$$

et par conséquent $f * F$ est partout définie. La continuité résulte de la proposition 2.7, parce que

$$|f * F(\xi) - f * F(\zeta)| \leqq \frac{\|F\|_\infty}{\|\omega_{q-1}\|} \|f(\xi\cdot\ ) - f(\zeta\cdot\ )\|_1. \ /$$

Qu'on remarque que la proposition subsiste encore, si f est une fonction borélienne de $\mathscr{L}^\alpha([-1,1],q)$, et $F \in \mathscr{L}^\beta(\Omega_q)$, où $1 \leqq \alpha, \beta \leqq \infty$; $\alpha^{-1} + \beta^{-1} = 1$.

§ 4. Développements en séries de polynômes de Legendre dans q dimensions, et de fonctions sphériques

Un exposé court et élégant de la théorie des fonctions sphériques et des polynômes de Legendre dans q dimensions se trouve dans [15]. Nous allons en utiliser la notation et les théorèmes.

Une fonction sphérique d'ordre n dans q dimensions est par définition un polynôme homogène harmonique de degré n à q variables $x_1, \cdots, x_q$. On la considère comme fonction sur Ω_q. L'ensemble des fonctions sphériques d'ordre n et la fonction $\xi \mapsto 0$ forment un espace vectoriel de dimension finie de fonctions $\Omega_q \to \mathbf{R}$. Il est noté H_n, et sa dimension est notée $N(q,n)$ (cf. [15] p. 2–4). Les espaces H_n, $n = 0,1,\cdots$, sont orthogonaux entre eux dans l'espace de Hilbert $\mathscr{L}^2(\Omega_q)$, et leur somme hilbertienne est égale à

$\mathscr{L}^2(\Omega_q)$. Si S_i, $i = 1, \cdots, N(q,n)$ forment une base orthonormale de H_n, la fonction

$$F_n(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{N(q,n)} S_i(\xi) S_i(\eta)$$

ne dépend pas de la base choisie; elle est appelée le noyau réproductif de l'espace H_n. Son importance est la suivante: Si $f \in \mathscr{L}^2(\Omega_q)$, et si f_n est la projection de f sur H_n, alors $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ dans l'espace $\mathscr{L}^2(\Omega_q)$, et f_n se calcule

$$f_n(\xi) = \int_{\Omega_q} F_n(\xi,\eta) f(\eta) d\omega_q(\eta).$$

La série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est appelée le développement de f en série de fonctions sphériques. Avant d'étendre ce développement aux distributions, il nous faut connaître le noyau réproductif F_n.

Les polynômes de Legendre dans q dimensions seront notés $p_n(q,t)$; ils sont des polynômes de degré $n = 0, 1, \cdots$ dans le variable t caractérisés par les conditions

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-1}^{1} p_n(q,t) p_m(q,t) (1-t^2)^{\frac{1}{2}(q-3)} dt = 0 \quad \text{si} \quad n \neq m, \\ &p_n(q,1) = 1 \quad \text{pour} \quad n = 0,1,\cdots. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

De plus on a (cf. [15] p. 15)

$$\int_{-1}^{1} p_n^2(q,t)(1-t^2)^{\frac{1}{2}(q-3)} dt = \frac{\|\omega_q\|}{\|\omega_{q-1}\| N(q,n)}. \tag{12}$$

Ils sont aussi appelés les polynômes ultrasphériques. Si $q = 3$ on obtient les polynômes classiques de Legendre, et on sait que $p_n(2,t) = \cos(n \operatorname{Arc-}\cos t)$ pour $t \in [-1,1]$ sont les polynômes de Čebyčev.

De la formule (11) on tire

$$\left.\begin{aligned} &p_0(q,t) = 1, \quad p_1(q,t) = t, \\ &p_2(q,t) = \frac{q}{q-1} t^2 - \frac{1}{q-1}, \; p_3(q,t) = \frac{q+2}{q-1} t^3 - \frac{3}{q-1} t. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

D'après (11), (12) le système

$$\left(\frac{\|\omega_{q-1}\| N(q,n)}{\|\omega_q\|} \right)^{\frac{1}{2}} p_n(q,t), \quad n = 0,1,\cdots,$$

est une base orthonormale dans l'espace de Hilbert $\mathscr{L}^2([-1,1],q)$.

À une fonction $f \in \mathscr{L}^1([-1,1],q)$ *on attache la série*

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|\omega_{q-1}\| N(q,n)}{\|\omega_q\|} a_n p_n(q,t), \tag{14}$$

où

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(t) p_n(q,t)(1-t^2)^{\frac{1}{2}(q-3)} dt,$$

appelée le développement de f *en série de polynômes de Legendre dans* q *dimensions.*

Le noyau réproductif F_n a une liason étroite avec $p_n(q,t)$. Puisqu'il est très important, nous citons ce résultat.

THÉORÈME 2.10. (*Le théorème d'addition de G. Herglotz.*) *Le noyau réproductif* F_n *de l'espace* H_n *des fonctions sphériques d'ordre* n *est donné par*

$$F_n(\xi,\eta) = \frac{N(q,n)}{\|\omega_q\|} p_n(q,\xi\cdot\eta).$$

Pour la démonstration voir [15] p. 9. Il est important de remarquer qu'il en découle:

Pour un $\eta \in \Omega_q$ fixé, l'application $\xi \mapsto p_n(q,\xi\cdot\eta)$ est une fonction sphérique d'ordre n.

Citons aussi:

THÉORÈME 2.11. (*P. Funk, E. Hecke.*) *Soient* f *une fonction borélienne de* $\mathscr{L}^1([-1,1],q)$ et $S \in H_n$. *Alors*

$$\int_{\Omega_q} f(\xi\cdot\eta) S(\eta) d\omega_q(\eta) = \lambda S(\xi),$$

où

$$\lambda = \|\omega_{q-1}\| \int_{-1}^{1} f(t) p_n(q,t)(1-t^2)^{\frac{1}{2}(q-3)} dt.$$

Le théorème est démontré dans [15] p. 18, mais sous la condition f continue. Cependant, une revue de la démonstration montre qu'on utilise essentiellement les conditions ci-dessus, et la proposition 2.7.

À une $F \in \mathscr{L}^1(\Omega_q)$ *on attache la série*

$$F \sim \sum_{n=0}^{\infty} S_n, \tag{15}$$

où

$$S_n(\xi) = \frac{N(q,n)}{\|\omega_q\|} \int_{\Omega_q} p_n(q, \xi \cdot \eta) F(\eta) d\omega_q(\eta) = \frac{\|\omega_{q-1}\| N(q,n)}{\|\omega_q\|} p_n(q, \ ) * F(\xi),$$

et à une distribution $T \in \mathscr{D}'(\Omega_q)$ on attache la série

$$T \sim \sum_{n=0}^{\infty} S_n, \tag{16}$$

où

$$S_n(\xi) = \frac{N(q,n)}{\|\omega_q\|} \underset{\eta}{T}(p_n(q, \xi \cdot \eta)) = \frac{\|\omega_{q-1}\| N(q,n)}{\|\omega_q\|} p_n(q, \ ) * T(\xi).$$

Les séries sont appelées les développements en séries de fonctions sphériques.

D'après 2.10 S_n est zéro ou une fonction sphérique d'ordre n. Les deux définitions sont compatibles avec le plongement $\mathscr{L}^1(\Omega_q) \subseteq \mathscr{D}'(\Omega_q)$.

Le théorème suivant montre que le produit de convolution est important en relation avec les développements.

THÉORÈME 2.12. (i) *Soit f une fonction borélienne de $\mathscr{L}^1([-1,1], q)$, et posons $F(\xi) = f(a \cdot \xi)$ pour un $a \in \Omega_q$. (Donc $F \in \mathscr{L}^1(\Omega_q)$.) Pour les développements*

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|\omega_{q-1}\| N(q,n)}{\|\omega_q\|} a_n p_n(q,t) \quad \textit{et} \quad F \sim \sum_{n=0}^{\infty} S_n,$$

on a

$$S_n(\xi) = \frac{\|\omega_{q-1}\| N(q,n)}{\|\omega_q\|} a_n p_n(q, a \cdot \xi).$$

(ii) *Soient $\varphi \in C^{\infty}([-1,1])$ et $T \in \mathscr{D}'(\Omega_q)$ avec les développements*

$$\varphi \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|\omega_{q-1}\| N(q,n)}{\|\omega_q\|} a_n p_n(q,t) \quad \textit{et} \quad T \sim \sum_{n=0}^{\infty} S_n.$$

Alors $\varphi * T$ a le développement

$$\varphi * T \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n S_n.$$

(iii) *Soient f une fonction borélienne de $\mathscr{L}^1([-1,1], q)$ et $\mu \in \mathscr{M}(\Omega_q)$ avec les développements*

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|\omega_{q-1}\| N(q,n)}{\|\omega_q\|} a_n p_n(q,t) \quad et \quad \mu \sim \sum_{n=0}^{\infty} S_n.$$

Alors $f * \mu$ a le développement

$$f * \mu \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n S_n.$$

Démonstration: (i) Nous avons

$$\begin{aligned} S_n(\xi) &= \frac{N(q,n)}{\|\omega_q\|} \int_{\Omega_q} p_n(q, \xi \cdot \eta) f(a \cdot \eta)\, d\omega_q(\eta) \\ &= p_n(q, a \cdot \xi) \frac{\|\omega_{q-1}\| N(q,n)}{\|\omega_q\|} \int_{-1}^{1} f(t) p_n(q,t)(1-t^2)^{\frac{1}{2}(q-3)}\, dt \\ &= \frac{\|\omega_{q-1}\| N(q,n)}{\|\omega_q\|} a_n p_n(q, a \cdot \xi). \end{aligned}$$

Nous nous sommes servis du fait que pour un ξ fixe, l'application $\eta \mapsto p_n(q, \xi \cdot \eta)$ est une fonction sphérique, et ensuite nous avons utilisé le théorème 2.11.

(ii) La valeur en $\xi \in \Omega_q$ du terme n-ième du développement de $\varphi * T$ est

$$\begin{aligned} \frac{N(q,n)}{\|\omega_q\|} \int_{\Omega_q} p_n(q, \xi \cdot \eta) \varphi * T(\eta)\, d\omega_q(\eta) &= \frac{N(q,n)}{\|\omega_q\|\,\|\omega_{q-1}\|} \int_{\Omega_q} p_n(q, \xi \cdot \eta) \underset{\sigma}{T}(\varphi(\eta \cdot \sigma))\, d\omega_q(\eta) \\ &= \frac{N(q,n)}{\|\omega_q\|\,\|\omega_{q-1}\|} \underset{\sigma}{T} \left\{ \int_{\Omega_q} \varphi(\eta \cdot \sigma) p_n(q, \xi \cdot \eta)\, d\omega_q(\eta) \right\} \\ &= \frac{N(q,n)}{\|\omega_q\|\,\|\omega_{q-1}\|} \underset{\sigma}{T} \{ \|\omega_{q-1}\| a_n p_n(q, \xi \cdot \sigma) \} = a_n S_n(\xi), \end{aligned}$$

en vertu de la proposition 2.4 et le théorème 2.11.

(iii) La démonstration de (iii) est égale à celle de (ii), excepté que le «théorème de Fubini» 2.4 est remplacé par le théorème de Fubini proprement dit.

COROLLAIRE 2.13. (i) *Si deux distributions T_1, $T_2 \in \mathscr{D}'(\Omega_q)$ ont le même développement en série de fonctions sphériques, on a $T_1 = T_2$.*

(ii) *Si deux fonctions boréliennes f_1, f_2 de $\mathscr{L}^1([-1,1], q)$ ont le même* *développement en série de polynômes de Legendre dans q dimensions, on a $f_1 = f_2$ dans $\mathscr{L}^1([-1,1],q)$, donc $f_1 = f_2$ presque partout.*

Démonstration: (i) Dans ce cas la distribution $T = T_1 - T_2$ a le développement $\sum_{n=0}^{\infty} 0$. Soit $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0,1[}$ une unité approchée de Ω_q, alors $\varphi_\varepsilon * T \in C^\infty(\Omega_q)$, et d'après le théorème précédent $\varphi_\varepsilon * T$ a également le développement $\sum_{n=0}^{\infty} 0$. Cependant, nous savons qu'une fonction de $\mathscr{L}^2(\Omega_q)$ est 0 presque partout si son développement est $\sum_{n=0}^{\infty} 0$. Par conséquent $\varphi_\varepsilon * T = 0$, ce qui entraîne $T = 0$, parce que $\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi_\varepsilon * T = T$ dans $\mathscr{D}'(\Omega_q)$.

(ii) Choisissons $a \in \Omega_q$, et posons $F(\xi) = f(a \cdot \xi)$, où $f = f_1 - f_2$. D'après le théorème précédent F a le développement $\sum_{n=0}^{\infty} 0$, donc d'après (i) $F = 0$ ω_q-presque partout, ce qui entraîne $f_1 = f_2$ dans $\mathscr{L}^1([-1,1],q)$. /

Soit S_n une fonction sphérique d'ordre n dans q dimensions. Alors pour $\lambda > 0$, $\xi \in \Omega_q$ on a

$$S_n(\lambda \xi) = \lambda^n S_n(\xi).$$

De plus on sait que $\Delta_q S_n = 0$. D'après 2.6 formule (3) il résulte que

$$\Delta_q^* S_n(\xi) = -n(n+q-2) S_n(\xi), \quad D_q^* S_n(\xi) = -\frac{(n-1)(n+q-1)}{q-1} S_n(\xi). \tag{17}$$

En particulier

$$\underset{\eta}{D_q^*} p_n(q, \xi \cdot \eta) = -\frac{(n-1)(n+q-1)}{q-1} p_n(q, \xi \cdot \eta). \tag{18}$$

THÉORÈME 2.14. *Soit $T \in \mathscr{D}'(\Omega_q)$ avec le développement $T \sim \sum_{n=0}^{\infty} S_n$ en série de fonctions sphériques. Alors la distribution $D_q^* T$ a le développement*

$$D_q^* T \sim \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{(n-1)(n+q-1)}{q-1} S_n.$$

Démonstration: On calcule

$$\begin{aligned} \frac{N(q,n)}{\|\omega_q\|} \underbrace{D_q^* T}_{\eta}(p_n(q, \xi \cdot \eta)) &= \frac{N(q,n)}{\|\omega_q\|} \underset{\eta}{T}(\underset{\eta}{D_q^*} p_n(q, \xi \cdot \eta)) \\ &= -\frac{(n-1)(n+q-1)}{q-1} \frac{N(q,n)}{\|\omega_q\|} \underset{\eta}{T}(p_n(q, \xi \cdot \eta)), \end{aligned}$$

ce qui montre l'assertion. /

Puisque

$$\frac{(n-1)(n+q-1)}{q-1} = 0$$

équivaut à $n = 1$ lorsque $n \geqq 0$, on conclut:

COROLLAIRE 2.15. *Le noyau de l'opérateur* $D_q^*: \mathscr{D}'(\Omega_q) \to \mathscr{D}'(\Omega_q)$ *est* H_1,*i.e. l'ensemble des fonctions* $\{\xi \longmapsto a \cdot \xi \mid a \in \mathbf{R}^q\}$.

Chapitre 3

LE NOYAU SPHÉRIQUE g_q

§ 1. L'existence du noyau sphérique g_q

Soit $K \in \mathscr{C}_q$ un corps convexe lisse. D'après (10) chapitre 2, nous savons que pour un $\xi \in \Omega_q$

$$D_q^* h_K(\xi) = \frac{R_1 + \cdots + R_{q-1}}{q-1}(\xi). \tag{1}$$

Nous cherchons une fonction borélienne g_q de $\mathscr{L}^1([-1,1],q)$ telle que

$$g_q * \frac{R_1 + \cdots + R_{q-1}}{q-1} = h_K. \tag{2}$$

Supposons qu'elle existe, et posons

$$h_K \sim \sum_{n=0}^{\infty} S_n,$$

$$g_q \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|\omega_{q-1}\| N(q,n)}{\|\omega_q\|} a_n p_n(q,t).$$

Selon (1) et le théorème 2.14 nous avons

$$\frac{\mathrm{R}_1 + \cdots + R_{q-1}}{q-1} \sim S_0 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)(n+q-1)}{q-1} S_n,$$

et par conséquent en vertu du théorème 2.12

$$g_q * \frac{R_1 + \cdots + R_{q-1}}{q-1} \sim a_0 S_0 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)(n+q-1)}{q-1} a_n S_n.$$

Pour la réalisation de (2) il faut avoir

$$a_0 = 1, \quad a_n = -\frac{q-1}{(n-1)(n+q-1)} \quad \text{si} \quad n \geqq 2, \quad \text{et} \quad S_1 = 0,$$

tandis que a_1 puisse être arbitraire. La condition $S_1 = 0$ dit exactement

$$\frac{q}{\|\omega_q\|}\int_{\Omega_q} \xi \cdot \eta h_K(\eta)\, d\omega_q(\eta) = 0$$

pour tout $\xi \in \Omega_q$, donc le point de Steiner $\mathscr{S}(K)$ de K doit remplir l'équation

$$\mathscr{S}(K) = \frac{q}{\|\omega_q\|}\int_{\Omega_q} \eta h_K(\eta)\, d\omega_q(\eta) = 0.$$

On peut toujours obtenir $\mathscr{S}(K) = 0$ par une translation convenable de K. Si on choisit $a_1 = 0$, on est conduit au développement suivant de g_q:

$$g_q \sim \frac{\|\omega_{q-1}\|}{\|\omega_q\|}\left(1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(q-1)N(q,n)}{(n-1)(n+q-1)} p_n(q,t)\right). \tag{3}$$

Par avance on ne peut pas savoir si le développement (3) provient d'une fonction $g_q \in \mathscr{L}^1([-1,1],q)$. Qu'en effet c'est le cas, va être démontré dans le théorème 3.3. Si nous présumons ce résultat, nous avons la proposition provisoire:

PROPOSITION 3.1. *Soit $K \in \mathscr{C}_q$ un corps convexe lisse tel que $\mathscr{S}(K) = 0$. Alors*

$$h_K(\xi) = g_q * \frac{R_1 + \cdots + R_{q-1}}{q-1}(\xi) = \frac{1}{\|\omega_{q-1}\|}\int_{\Omega_q} g_q(\xi \cdot \eta) \frac{R_1 + \cdots + R_{q-1}}{q-1}(\eta) d\omega_q(\eta).$$

Démonstration: Nous savons que h_K et $g_q * \frac{R_1 + \cdots + R_{q-1}}{q-1}$ ont le même développement en série de fonctions sphériques, et par conséquent ils sont égaux ω_q-presque partout (2.13). De plus tous les deux sont des fonctions continues, la dernière selon 2.9; donc l'identité est démontrée. /

Retournons au développement (3), et déterminons quand il provient d'une fonction g_q de $\mathscr{L}^2([-1,1],q)$. Puisque la base orthonormale utilisée est

$$\left(\frac{\|\omega_{q-1}\| N(q,n)}{\|\omega_q\|}\right)^{\frac{1}{2}} p_n(q,t), \qquad n = 0,1,\cdots,$$

les coefficients du développement sont

$$\left(\frac{\|\omega_{q-1}\|}{\|\omega_q\|}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1, 0, \cdots, \frac{-(q-1)N(q,n)^{\frac{1}{2}}}{(n-1)(n+q-1)}, \cdots\right),$$

et leur somme carrée est

$$\frac{\|\omega_{q-1}\|}{\|\omega_q\|}\left(1 + (q-1)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{N(q,n)}{(n-1)^2(n+q-1)^2}\right). \tag{4}$$

D'après [15] p. 4 on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(q,n)}{n^{q-2}} = \frac{2}{(q-2)!},$$

donc (4) est convergente précisément pour $4 - q + 2 > 1$, i.e. pour $q = 2,3,4$.

PROPOSITION 3.2. *Pour les dimensions $q = 2,3,4$ on peut trouver une fonction g_q de $\mathscr{L}^2([-1,1],q)$, qui possède le développement* (3). *Ceci ne subsiste pas pour les dimensions plus grandes.*

Le théorème suivant montre explicitement qu'il existe pour tous les dimensions $q \geqq 2$ une fonction (et une seule) g_q de $\mathscr{L}^1([-1,1],q)$ avec le développement désiré (3).

THÉORÈME 3.3. *Soient g_q: $]-1,1[\to \mathbf{R}$, $q \geqq 2$, une suite de fonctions définies par*

$$g_2(t) = \frac{1}{\pi}(\pi - \operatorname{Arccos} t)(1-t^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2\pi}t,$$

$$g_3(t) = 1 + t\log(1-t) + (\tfrac{4}{3} - \log 2)t,$$

et ensuite par la formule de récursion ($q \geqq 2$)

$$g_{q+2}(t) = \frac{q+1}{(q-1)^2} t g_q'(t) + \frac{q+1}{q-1} g_q(t) + \frac{q+1}{q+2} \frac{\|\omega_{q+1}\|}{\|\omega_{q+2}\|} t. \tag{5}$$

Il est possible de prolonger g_q à l'intervalle $[-1,1]$, parce que g_q a des valeurs limites aux points ± 1. Plus précisément on a:

(i) *La valeur limite* $\lim_{t \to -1} g_q(t)$ *existe et est finie pour* $q \geqq 2$.

(ii) *La valeur limite* $\lim_{t \to 1} g_q(t)$ *est égale à* $-\infty$ *pour* $q \geqq 3$, *tandis que* $\lim_{t \to 1} g_2(t) = -1/2\pi$. *De plus on a*

$$\lim_{t \to 1} (1-t)^{\frac{1}{2}(q-3)+\varepsilon} g_q(t) = 0,$$

pour tout $\varepsilon > 0$ *si* $q \geqq 3$.

Les fonctions g_q *possèdent les propriétés suivantes*:

(iii) *La fonction* $g_q\colon [-1,1] \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ *est semi-continue supérieurement pour* $q \geqq 3$, *et la fonction* $g_2\colon [-1,1] \to \mathbf{R}$ *est continue. On a de plus* $g_q \in C^{\infty}([-1,1[)$ *pour* $q \geqq 2$.

(iv) *La fonction* $g_q(t)(1-t^2)^{\frac{1}{2}(q-3)}$ *est intégrable sur* $[-1,1]$, *donc* $g_q \in \mathscr{L}^1([-1,1],q)$ *pour* $q \geqq 2$. *Pour* $q \geqq 3$ *un peu plus est valable, puisqu'en effet* $g_q(t)(1-t^2)^{\frac{1}{2}(q-4)}$ *est intégrable sur* $[-1,1]$.

(v) *Le développement de* g_q *en série de polynômes de Legendre dans* q *dimensions est celui désiré ci-dessus* (3).

Démonstration:

(a) *Le théorème est vrai pour* g_2.

En effet g_2 est bien définie et continue sur l'intervalle $[-1,1]$ par la formule donnée, et $g_2(-1) = -g_2(1) = 1/2\pi$. Trivialement g_2 est indéfiniment dérivable dans $]-1,1[$, alors il nous manque seulement le point -1. Dans l'intervalle $[-1,0]$ on a

$$g_2(t) = \frac{1}{\pi}(1-t^2)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Arcsin}(1-t^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2\pi}t.$$

Considérons la série entière de $u \operatorname{Arcsin} u$, valable pour $u \in\,]-1,1[$

$$u \operatorname{Arcsin} u = \sum_{p=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{p} \frac{(-1)^p}{2p+1} u^{2p+2}.$$

Le rayon de convergence est 1. Il en découle que

$$t \mapsto \sum_{p=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{p} \frac{(-1)^p}{2p+1} (1-t^2)^{p+1}$$

définit une fonction holomorphe dans l'ouvert

$$\{t \in \mathbf{C} \mid |1-t^2| < 1\},$$

qui est borné d'un lemniscate aux points focaux -1 et 1. Ceci montre que g_2 peut se prolonger à une fonction holomorphe dans la partie gauche du lemniscate. Par conséquent $g_2 \in C^{\infty}([-1,1[)$, et g_2 et toutes ses dérivées possédent une valeur limite finie, quand t tend vers -1.

Dans l'intervalle $[0,1]$ on a

$$g_2(t) = (1-t^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\pi}(1-t^2)^{\frac{1}{2}}\operatorname{Arcsin}(1-t^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2\pi}t.$$

Du raisonnement ci-dessus il résulte que $(1-t^2)^{\frac{1}{2}}\operatorname{Arcsin}(1-t^2)^{\frac{1}{2}}$ peut se prolonger à une fonction holomorphe dans la partie droite du lemniscate. De plus on voit facilement qu'on a, en posant $\varphi(t) = (1-t^2)^{\frac{1}{2}}$,

$$\lim_{t\to 1}\varphi^{(n)}(t) = -\infty \quad \text{pour} \quad n \geqq 1,$$

ce qui entraîne

$$\lim_{t\to 1} g_2^{(n)}(t) = -\infty \quad \text{pour} \quad n \geqq 1.$$

On sait que la fonction

$$g_2(t)(1-t^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi}(\pi - \operatorname{Arccos} t) - \frac{t}{2\pi}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$$

est intégrable sur $[-1,1]$.

Il nous reste de trouver le développement de g_2 en série de polynômes de Legendre dans deux dimensions. Le développement est donné par

$$g_2 \sim \frac{\|\omega_1\|}{\|\omega_2\|}\sum_{n=0}^{\infty} N(2,n)a_n p_n(2,t),$$

où

$$a_n = \int_{-1}^{1} p_n(2,t)g_2(t)(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}dt.$$

Si on pose $t = \cos\theta$ pour $\theta \in [0,\pi]$, les calculs sont faciles parce que $p_n(2, \cos\theta) = \cos(n\theta)$, et on trouve

$$a_0 = 1, a_1 = 0 \quad \text{et} \quad a_n = \frac{-1}{(n-1)(n+1)} \quad \text{pour} \quad n \geqq 2,$$

donc

$$g_2 \sim \frac{\|\omega_1\|}{\|\omega_2\|}\left(1 - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{N(2,n)}{(n-1)(n+1)}p_n(2,t)\right),$$

ce qui montre le théorème pour $q = 2$. D'ailleurs $\|\omega_1\| / \|\omega_2\| = 1/\pi$, et $N(2,n) = 2$ pour $n \geqq 2$.

Dans ce qui suit nous allons utiliser la représentation suivante:

Pour $n \geqq 1$ on a

$$g_2^{(n)} = \frac{(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(\pi - \operatorname{Arccos} t) P_n(t) + Q_{n-1}(t)}{(1-t^2)^{n-1}}, \tag{6}$$

où P_n et Q_{n-1} sont des polynômes de degré resp. $\leqq n$ et $\leqq n-1$. En outre $P_n(1) \neq 0$.

Ceci s'obtient par récurrence sur n. Pour $n = 1$ on a

$$g_2'(t) = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(\pi - \operatorname{Arccos} t)\left(-\frac{1}{\pi}t\right) + \frac{1}{2\pi},$$

ce qui montre l'assertion avec $P_1(t) = -t/\pi$ et $Q_0(t) = 1/2\pi$. Supposons que l'assertion soit vrai pour un n; il en résulte que

$$g_2^{(n+1)}(t) = \frac{(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(\pi - \operatorname{Arccos} t) P_{n+1}(t) + Q_n(t)}{(1-t^2)^n},$$

où nous avons posé

$$\begin{aligned} P_{n+1}(t) &= (2n-1)tP_n(t) + (1-t^2)P_n'(t), \\ Q_n(t) &= P_n(t) + (1-t^2)Q_{n-1}'(t) + 2(n-1)tQ_{n-1}(t). \end{aligned}$$

Par conséquent $P_{n+1}(1) = (2n-1)P_n(1) \neq 0$, et l'assertion est démontrée.

(b) *Le théorème est vrai pour g_3.*

L'expression qui définit g_3 peut être utilisée dans l'intervalle $]-\infty, 1[$, et y représente une fonction indéfiniment dérivable, donc

$$\lim_{t \to -1} g_3^{(n)}(t) \text{ existe et est finie pour tout } n \geqq 0.$$

Il est évident que

$$g_3(t) \to -\infty, \qquad (1-t)^\varepsilon g_3(t) \to 0 \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0$$

quand $t \to 1$. De plus on a

$$\left.\begin{aligned} g_3'(t) &= \log(1-t) - \frac{t}{1-t} + \tfrac{4}{3} - \log 2 \to -\infty, \\ g_3^{(n)}(t) &= -\frac{(n-2)!(n-t)}{(1-t)^n} \to -\infty \quad \text{pour} \quad n \geqq 2, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

quand $t \to 1$.

Il est facile à voir que $g_3(t)(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$ est intégrable sur $[-1,1]$.

Le calcul du développement de g_3 en série de polynômes de Legendre ordinaires est facilité par la formule de O. Rodrigues (cf. [15] p. 17)

$$p_n(3,t) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\left(\frac{d}{dt}\right)^n \{(1-t^2)^n\}.$$

Le développement de g_3 est donné par

$$g_3 \sim \frac{||\omega_2||}{||\omega_3||}\sum_{n=0}^{\infty} N(3,n)\, a_n\, p_n(3,t),$$

où $\dfrac{||\omega_2||}{||\omega_3||} = \frac{1}{2}$ et $N(3,n) = 2n+1$, et où

$$a_n = \int_{-1}^{1} g_3(t)\, p_n(3,t)\, dt = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1} g_3(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^n \{(1-t^2)^n\}\, dt.$$

Nous allons utiliser l'intégration par parties n fois. Les termes

$$\left[g_3^{(j)}(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-j-1}\{(1-t^2)^n\}\right]_{t=-1}^{t=1} \quad \text{pour} \quad j = 0, 1, \cdots, n-1$$

sont tous 0 d'après (7), car

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-j-1}\{(1-t^2)^n\}$$

est égal à $(1-t^2)^{j+1}$ multiplié par un polynôme en t. Par conséquent on a

$$a_n = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} g_3^{(n)}(1-t^2)^n\, dt,$$

et un calcul facile découvre que

$$a_0 = 1,\ a_1 = 0 \quad \text{et} \quad a_n = \frac{-2}{(n-1)(n+2)} \quad \text{pour } n \geqq 2,$$

donc g_3 possède le développement désiré (3) pour $q = 3$.

(c) *Le théorème est vrai pour* g_q, $q \geqq 4$.

La formule de récursion (5) entraîne pour $t \in]-1,1[$

$$g_q(t) = a_q t + \sum_{n=0}^{\frac{1}{2}(q-\alpha(q))} b_{q,n}\, t^n g_{\alpha(q)}^{(n)}(t) \quad \text{pour} \quad q > \alpha(q), \tag{8}$$

où $\alpha(q)$ doit être 2 si q est pair, et 3 si q est impair. Dans (8) on a $a_q \in \mathbf{R}$ et $b_{q,n} > 0$ pour $n = 0, 1, \cdots, \frac{1}{2}(q - \alpha(q))$. D'après ce que nous avons démontré sur $g_2^{(n)}(t)$ et $g_3^{(n)}(t)$, on voit facilement en vertu de (8) que les assertions (i), (ii), (iii) du théorème sont vrais pour $q \geqq 4$, sauf peut-être la relation

$$\lim_{t \to 1} (1-t)^{\frac{1}{2}(q-3)+\varepsilon} g_q(t) = 0 \quad \text{pour} \quad \varepsilon > 0, q \geqq 4. \tag{9}$$

Si q est pair, il suffit selon (8) et l'identité $\lim_{t\to 1} g_2(t) = -1/2\pi$ de montrer que

$$\lim_{t \to 1} (1-t)^{\frac{1}{2}(q-3)+\varepsilon} g_2^{(n)}(t) = 0 \quad \text{pour} \quad \varepsilon > 0 \quad \text{et} \quad n = 1, \cdots, \tfrac{1}{2}(q-2).$$

Utilisant (6), nous voyons que

$$(1-t)^{\frac{1}{2}(q-3)+\varepsilon} g_2^{(n)}(t) = (1-t)^{\frac{1}{2}(q-2n-1)+\varepsilon} \frac{(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(\pi - \operatorname{Arccos} t) P_n(t) + Q_{n-1}(t)}{(1+t)^{n-1}},$$

ce qui tend vers 0 quand $t \to 1$, parce que $n \leqq \frac{1}{2}(q-2)$.

Si q est impair (donc $q \geqq 5$) il suffit selon (8) de montrer que

$$\lim_{t \to 1} (1-t)^{\frac{1}{2}(q-3)+\varepsilon} g_3^{(n)}(t) = 0 \quad \text{pour} \quad \varepsilon > 0 \quad \text{et} \quad n = 0, 1, \cdots, \tfrac{1}{2}(q-3).$$

Ceci est une conséquence immédiate de (7).

Choissisons $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$. Pour $q \geqq 4$ nous écrivons

$$g_q(t)(1-t^2)^{\frac{1}{2}(q-4)} = \frac{g_q(t)(1-t^2)^{\frac{1}{2}(q-3)+\varepsilon}}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}},$$

et d'après (9) le numérateur est une fonction continue sur l'intervalle $[-1, 1]$. Comme $(1-t^2)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}$ est intégrable sur $[-1, 1]$, on conclut que (iv) est valable.

Il nous reste seulement de démontrer que g_q a le développement (3) pour $q \geqq 4$. Cela va être démontré par récurrence sur q à l'aide de la formule de récursion (5). Nous aurons besoin de plusieures formules entre les polynômes de Legendre de différents degrés et dimensions. Les voici:

(α) $\quad (q-1)p_n'(q,t) = n(n+q-2)p_{n-1}(q+2,t).$

(β) $\quad (n+q-2)(1-t^2)p_{n-1}(q+2,t) = (q-1)p_{n-1}(q,t) - (q-1)tp_n(q,t).$

(γ) $\quad np_{n-1}(q+2,t) = (n+q-1)tp_n(q+2,t) - (q-1)p_{n+1}(q,t).$

(δ) $\quad (2n+q)tp_{n+1}(q,t) = (n+q-1)p_{n+2}(q,t) + (n+1)p_n(q,t).$

Ces formules sont des cas particuliers des formules analogues pour les polynômes de Gegenbauer $C_n^\nu(t)$, puisque

$$p_n(q,t) = \binom{n+q-3}{n}^{-1} C_n^{\frac{1}{2}(q-2)}(t) \qquad \text{(cf. [15] p. 33).}$$

On trouve ces formules analogues dans [14] p. 282 sous les numéros (4), (10), (3) et (8) dans le même ordre comme ci-dessus. Nous allons en déduire:

LEMME 3.4. *La formule suivante est valable*:

$$(q-1)p_n(q+2,t) - (1-t^2)(p_n(q+2,t) + tp_n'(q+2,t))$$
$$= \frac{q-1}{2n+q}((n+q-1)p_n(q,t) + (n+1)p_{n+2}(q,t)).$$

Démonstration: D'après (α) et (β) on a

$$(1-t^2)p_n'(q+2,t) = np_{n-1}(q+2,t) - ntp_n(q+2,t).$$

Si on multiplie ceci par t et additionne $(1-t^2)p_n(q+2,t)$, on a

$$(1-t^2)(p_n(q+2,t) + tp_n'(q+2,t))$$
$$= (n+1)(1-t^2)p_n(q+2,t) + ntp_{n-1}(q+2,t) - np_n(q+2,t).$$

Donc le membre gauche G de la formule désirée est égal à

$$G = (n+q-1)p_n(q+2,t) - ntp_{n-1}(q+2,t) - (n+1)(1-t^2)p_n(q+2,t).$$

En vertu de (γ) on a

$$-ntp_{n-1}(q+2,t) = (q-1)tp_{n+1}(q,t) - (n+q-1)t^2p_n(q+2,t).$$

Si on substitue ceci dans l'expression de G, on obtient

$$G = (q-2)(1-t^2)p_n(q+2,t) + (q-1)tp_{n+1}(q,t).$$

D'après (β) avec n remplacé par $n+1$ on voit que

$$(n+q-1)G = (q-2)(q-1)p_n(q,t) + (n+1)(q-1)tp_{n+1}(q,t),$$

et en appliquant (δ) sur le terme dernier, on trouve

$$\begin{aligned}(2n+q)(n+q-1)G &= (n+q-1)(n+1)(q-1)p_{n+2}(q,t)\\ &\quad + (q-1)(n+q-1)^2 p_n(q,t),\end{aligned}$$

ce qui montre le lemme. /

Supposons que g_q possède le développement (3), c'est-à-dire

$$a_n(q) = \int_{-1}^{1} g_q(t)p_n(q,t)(1-t^2)^{\frac{1}{2}(q-3)}\,dt = \begin{cases} -\dfrac{q-1}{(n-1)(n+q-1)} & \text{si } n \neq 1, \\ 0 & \text{si } n = 1. \end{cases} \tag{10}$$

Nous allons démontrer

$$a_n(q+2) = \int_{-1}^{1} g_{q+2}(t)p_n(q+2,t)(1-t^2)^{\frac{1}{2}(q-1)}\,dt = \begin{cases} -\dfrac{q+1}{(n-1)(n+q+1)} & \text{si } n \neq 1, \\ 0 & \text{si } n = 1. \end{cases} \tag{11}$$

D'après la formule de récursion (5) $a_n(q+2)$ est la somme des expressions A_n, B_n et C_n, où

$$A_n = \frac{q+1}{(q-1)^2}\int_{-1}^{1} g_q'(t)p_n(q+2,t)t(1-t^2)^{\frac{1}{2}(q-1)}\,dt.$$

$$B_n = \frac{q+1}{q-1}\int_{-1}^{1} g_q(t)p_n(q+2,t)(1-t^2)^{\frac{1}{2}(q-1)}\,dt.$$

$$C_n = \frac{q+1}{q+2}\frac{\|\omega_{q+1}\|}{\|\omega_{q+2}\|}\int_{-1}^{1} tp_n(q+2,t)(1-t^2)^{\frac{1}{2}(q-1)}\,dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 1, \\ \dfrac{q+1}{(q+2)^2} & \text{si } n = 1. \end{cases}$$

Ce dernier est tiré des formules (11), (12) et (13) du chapitre 2.

Soit $n = 0$. L'intégration par parties dans A_0 donne

$$A_0 = -\frac{q+1}{(q-1)^2}\int_{-1}^{1} g_q(t)(1-qt^2)(1-t^2)^{\frac{1}{2}(q-3)}\,dt,$$

puisque

$$[g_q(t)(1-t^2)^{\frac{1}{2}(q-1)}]_{t=-1}^{t=1} = 0. \tag{12}$$

D'après (13) chapitre 2, et (10) on a

$$A_0 = \frac{q+1}{q-1}\int_{-1}^{1} g_q(t)p_2(q,t)(1-t^2)^{\frac{1}{2}(q-3)}\,dt = -1.$$

De la même manière on obtient

$$B_0 = \frac{q+1}{q}\int_{-1}^{1} g_q(t)(p_0(q,t)-p_2(q,t))(1-t^2)^{\frac{1}{2}(q-3)}\,dt = 2,$$

donc $a_0(q+2) = A_0+B_0+C_0 = 1$.

Soit $n=1$. Des calculs analogues et faciles montrent que $a_1(q+2) = 0$.

Soit $n \geqq 2$. L'intégration par parties dans A_n montre d'après (12) que

$$A_n = -\frac{q+1}{(q-1)^2}\int_{-1}^{1} g_q(t)(1-t^2)^{\frac{1}{2}(q-3)}\{q(1-t^2)p_n(q+2,t)$$
$$+\,t(1-t^2)p_n'(q+2,t)-(q-1)p_n(q+2,t)\}\,dt,$$

d'où

$$A_n+B_n = \frac{q+1}{(q-1)^2}\int_{-1}^{1} g_q(t)(1-t^2)^{\frac{1}{2}(q-3)}D_n(t)\,dt,$$

où nous avons posé

$$D_n(t) = (q-1)p_n(q+2,t)-(1-t^2)(p_n(q+2,t)+tp_n'(q+2,t)).$$

D'après le lemme 3.4 on sait que

$$D_n(t) = \frac{q-1}{2n+q}((n+q-1)p_n(q,t)+(n+1)p_{n+2}(q,t)),$$

d'où

$$A_n+B_n = \frac{q+1}{(q-1)(2n+q)}((n+q-1)a_n(q)+(n+1)a_{n+2}(q)).$$

Si on utilise (10), on trouve

$$A_n+B_n = -\frac{q+1}{(n-1)(n+q+1)},$$

et comme $n \geqq 2$ entraîne $C_n = 0$, il en résulte que

$$a_n(q+2) = -\frac{q+1}{(n-1)(n+q+1)},$$

et le théorème 3.3 est complètement démontré. /

La fonction g_q est le noyau de Green de l'opérateur D_q^*, et elle est appelée le noyau sphérique dans q dimensions.

De la formule de récursion (5) nous pouvons tirer une expression directe de g_q. Si q est pair, on trouve

$$g_q(t) = \frac{(q-1)\|\omega_{q-1}\|}{\|\omega_q\|}\left\{(\pi - \operatorname{Arccos} t)(1-t^2)^{\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(q-2)} a_k(1-t^2)^{-k} + t\sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(q-4)} b_k(1-t^2)^{-k} + c_q t\right\},$$

et si q est impair, on trouve

$$g_q(t) = \frac{(q-1)\|\omega_{q-1}\|}{\|\omega_q\|}\left\{1 + t\log(1-t) + (q-3)\sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(q-3)} d_k(1-t)^{-k} + e_q t\right\}.$$

Évidemment on peut établir des formules de récursions entre les coefficients paraîssants. Nous préférons de donner les formules explicites pour g_q dans les cas $q = 2, 3, 4, 5, 6$:

$$g_2(t) = \frac{1}{\pi}\left\{(\pi - \operatorname{Arccos} t)(1-t^2)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}t\right\}.$$

$$g_3(t) = 1 + t\log(1-t) + (\tfrac{4}{3} - \log 2)t.$$

$$g_4(t) = \frac{3}{\pi}\left\{(\pi - \operatorname{Arccos} t)(1-2t^2)(1-t^2)^{-\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}t\right\}.$$

$$g_5(t) = 3(1 + t\log(1-t)) - (1-t)^{-1} + (\tfrac{28}{5} - 3\log 2)t.$$

$$g_6(t) = \frac{5}{3\pi}\left\{(\pi - \operatorname{Arccos} t)(8t^4 - 12t^2 + 3)(1-t^2)^{-\frac{3}{2}} - t(1-t^2)^{-1} + \tfrac{16}{3}t\right\}.$$

§ 2. Quelques propriétés du noyau sphérique g_q

PROPOSITION 3.5. *Le noyau sphérique g_q remplit:*

(i) *Pour tout $a \in \Omega_q$ on a au sens des distributions*

$$\underset{\xi}{D_q^*}\{g_q(a\cdot\xi)\} = \|\omega_{q-1}\|\,\delta_a - \frac{q\|\omega_{q-1}\|}{\|\omega_q\|}\,a\cdot\xi, \tag{13}$$

où δ_a désigne la mesure de Dirac au point a, i.e. la mesure de masse 1 *concentrée dans a.*

(ii) *Dans l'intervalle* $]-1,1[$ *le noyau g_q satisfait à l'équation différentielle*

$$(1-t^2)g_q''(t)-(q-1)tg_q'(t)+(q-1)g_q(t) = -\frac{q(q-1)\|\omega_{q-1}\|}{\|\omega_q\|}t. \quad (14)$$

Démonstration: (i) D'après 2.7 on sait que $g_q(a\cdot\ ) \in \mathscr{L}^1(\Omega_q)$, et selon les théorèmes 2.12 et 3.3 son développement est donné par

$$g_q(a\cdot\xi) \sim \frac{\|\omega_{q-1}\|}{\|\omega_q\|}\left(1-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(q-1)N(q,n)}{(n-1)(n+q-1)}p_n(q,a\cdot\xi)\right).$$

Par conséquent on a

$$\underset{\xi}{D_q^*}\{g_q(a\cdot\xi)\} \sim \frac{\|\omega_{q-1}\|}{\|\omega_q\|}\left(1+\sum_{n=2}^{\infty}N(q,n)p_n(q,a\cdot\xi)\right).$$

La mesure de Dirac δ_a possède le développement

$$\delta_a \sim \frac{1}{\|\omega_q\|}\sum_{n=0}^{\infty}N(q,n)p_n(q,a\cdot\xi),$$

donc

$$\underset{\xi}{D_q^*}\{g_q(a\cdot\xi)\} \text{ et } \|\omega_{q-1}\|\delta_a - \frac{q\|\omega_{q-1}\|}{\|\omega_q\|}a\cdot\xi$$

ont le même développement, ce qui entraîne le résultat en vertu de 2.13.

(ii) Par restriction à l'ouvert $\Omega_q\diagdown\{a\}$, on déduit de (13) l'équation de distribution suivante

$$\left(\underset{\xi}{\Delta_q^*}+(q-1)\right)g_q(a\cdot\xi) = -\frac{q(q-1)\|\omega_{q-1}\|}{\|\omega_q\|}a\cdot\xi, \quad (15)$$

car δ_a induit la distribution 0 sur $\Omega_q\diagdown\{a\}$. Cependant la fonction $\xi \mapsto g_q(a\cdot\xi)$ est indéfiniment dérivable sur $\Omega_q\diagdown\{a\}$, donc (15) est une équation ordinaire entre des fonctions. Posons

$$\xi = ta+(1-t^2)^{\frac{1}{2}}\eta, \quad \text{où } t\in\,]-1,1[\quad \text{et} \quad \eta\in\Omega_{q-1} = \{\eta\in\Omega_q \mid a\cdot\eta = 0\}.$$

Alors $g_q(a\cdot\xi) = g_q(t)$ ne dépend pas de η, et (14) résulte de (4) de la proposition 2.6. /

LEMME 3.6. *L'équation différentielle homogène sur l'intervalle* $]-1,1[$

$$\frac{d^2}{dt^2} - \frac{q-1}{1-t^2} t \frac{d}{dt} + \frac{q-1}{1-t^2} = 0, \quad q = 2, 3, \cdots, \tag{16}$$

a deux solutions indépendantes t et $\varphi_q(t)$ telles que $\varphi_2(t) = (1-t^2)^{\frac{1}{2}}$, tandis que pour $q \geqq 3$, on ait $\varphi_q(t) \to \infty$ quand $t \to \pm 1$.

Démonstration: Dans le cas $q = 2$ on voit immédiatement que t et $\varphi_2(t) = (1-t^2)^{\frac{1}{2}}$ sont deux solutions indépendantes de (16). Dans le cas $q \geqq 3$ on sait que t et

$$\varphi_q(t) = t \int_{t_0}^{t} u^{-2}(1-u^2)^{\frac{1}{2}(1-q)}\, du,$$

où $t_0 \in \,]0,1[$, sont deux solutions indépendantes de (16) sur $]0,1[$. Si on développe la fonction qu'on intègre en série entière, on trouve

$$\varphi_q(t) = -1 + k(t_0)t + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}(1-q)}{n} \frac{(-1)^n}{2n-1} t^{2n}, \tag{17}$$

où $k(t_0)$ est une constante dépendante de t_0. La série entière est convergente pour $|t| < 1$, donc la formule (17) donne une solution de (16) sur tout l'intervalle $]-1,1[$. Puisque

$$\binom{\frac{1}{2}(1-q)}{n} \frac{(-1)^n}{2n-1} = \frac{(\frac{1}{2}(q-3)+1)\cdots(\frac{1}{2}(q-3)+n)}{n!(2n-1)} \geqq \frac{1}{2n-1},$$

on voit que $\varphi_q(t) \to \infty$ quand $t \to \pm 1$. /

À l'aide des solutions t et $\varphi_q(t)$ de (16) on sait trouver une formule explicite pour la solution g_q de (14). On trouve

$$g_q(t) = -\frac{q(q-1)\,\|\omega_{q-1}\|}{\|\omega_q\|}\, t \int_{\alpha_q}^{t} \left(s^{-2}(1-s^2)^{\frac{1}{2}(1-q)} \int_{-1}^{s} u^2(1-u^2)^{\frac{1}{2}(q-3)}\, du \right) ds.$$

Les limites inférieures -1 et α_q des intégrales sont fixées par les demandes que g_q soit régulière au point -1 et que

$$\int_{-1}^{1} t g_q(t)(1-t^2)^{\frac{1}{2}(q-3)}\, dt = 0.$$

Dans la théorie du potentiel sphérique nous aurons besoin de quelques lemmes sur g_q.

LEMME 3.7. *Soient* $\check{g}_q(t) = g_q(-t)$ *et* $h_q(t) = g_q(t) + \check{g}_q(t)$ *pour* $t \in [-1, 1]$. *Alors* $h_q(t)/t$ *est une fonction décroissante sur* $]0, 1[$ *pour* $q \geqq 2$.

Démonstration: Comme g_q satisfait à l'équation différentielle (14), on voit que $\check{g}_q$ satisfait à

$$(1 - t^2)(\check{g}_q)''(t) - (q-1)t(\check{g}_q)'(t) + (q-1)\check{g}_q(t) = \frac{q(q-1)\|\omega_{q-1}\|}{\|\omega_q\|}t,$$

et par l'addition à (14), on obtient

$$(1 - t^2)h_q''(t) - (q-1)th_q'(t) + (q-1)h_q(t) = 0 \quad \text{pour} \quad t \in]-1, 1[,$$

d'où

$$(1 - t^2)h_q''(t) = (q-1)t^2\left(\frac{h_q(t)}{t}\right)' \quad \text{pour} \quad t \in]0, 1[.$$

Il en découle:

Pour que $h_q'(t)$ *soit décroissante sur* $]0, 1[$, *il faut et il suffit que* $h_q(t)/t$ *soit décroissante sur* $]0, 1[$. (18)

Dans la même manière comme ci-dessus la formule de récursion (5) donne la formule suivante pour h_q:

$$h_{q+2}(t) = \frac{q+1}{(q-1)^2}th_q'(t) + \frac{q+1}{q-1}h_q(t) \quad \text{pour} \quad t \in]-1, 1[,$$

d'où

$$\frac{h_{q+2}(t)}{t} = \frac{q+1}{(q-1)^2}h_q'(t) + \frac{q+1}{q-1}\frac{h_q(t)}{t} \quad \text{pour} \quad t \in]0, 1[. \tag{19}$$

Le lemme résulte maintenant par récurrence sur q. On trouve

$$\frac{h_2(t)}{t} = \frac{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}{t} \quad \text{et} \quad \frac{h_3(t)}{t} = \frac{2}{t} + \log\frac{1-t}{1+t},$$

qui sont décroissantes sur $]0, 1[$. D'après (18), (19) il est évident que la décroissance de $h_q(t)/t$ sur $]0,1[$ entraîne celle de $h_{q+2}(t)/t$ sur $]0, 1[$. /

LEMME 3.8. *Le noyau sphérique* g_q *vérifie*

$$\lim_{t \to 1} \frac{g_q(t)}{g_q(2t^2 - 1)} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad q = 2. \\ 2^{q-3} & \text{si} \quad q \geqq 3. \end{cases}$$

Démonstration: Comme $\lim_{t \to 1} g_2(t) = -1/2\pi$, l'assertion est évidente pour $q = 2$. Par contre, le lemme n'est pas évident pour $q \geqq 3$ parce que $g_q(t) \to -\infty$ quand $t \to 1$.

Si q est pair, $q \geqq 4$, on a d'après (6)

$$\lim_{t\to 1}(1-t^2)^{\frac{1}{2}(q-3)}g_2^{(n)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqq n \leqq \frac{1}{2}(q-4), \\ \pi P_n(1) & \text{si } n = \frac{1}{2}(q-2), \end{cases}$$

et

$$\lim_{t\to 1}(1-t^2)^{\frac{1}{2}(q-3)}g_2^{(n)}(2t^2-1) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqq n \leqq \frac{1}{2}(q-4), \\ \pi P_n(1)2^{3-q} & \text{si } n = \frac{1}{2}(q-2). \end{cases}$$

En vertu de (8) on trouve

$$\lim_{t\to 1}\frac{g_q(t)}{g_q(2t^2-1)} = \frac{\pi P_n(1)}{\pi P_n(1)2^{3-q}} = 2^{q-3}.$$

Si $q = 3$ le lemme résulte d'un calcul simple.

Si q est impair, $q \geqq 5$, on a d'après (7)

$$\lim_{t\to 1}(1-t)^{\frac{1}{2}(q-3)}g_3^{(n)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqq n \leqq \frac{1}{2}(q-5), \\ -(\frac{1}{2}q-\frac{5}{2})! & \text{si } n = \frac{1}{2}(q-3), \end{cases}$$

et

$$\lim_{t\to 1}(1-t)^{\frac{1}{2}(q-3)}g_3^{(n)}(2t^2-1) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqq n \leqq \frac{1}{2}(q-5), \\ -(\frac{1}{2}q-\frac{5}{2})!\,2^{3-q} & \text{si } n = \frac{1}{2}(q-3). \end{cases}$$

Par conséquent on a d'après (8)

$$\lim_{t\to 1}\frac{g_q(t)}{g_q(2t^2-1)} = \frac{-(\frac{1}{2}q-\frac{5}{2})!}{-(\frac{1}{2}q-\frac{5}{2})!\,2^{3-q}} = 2^{q-3}. \ /$$

COROLLAIRE 3.9. *Soit* $q \geqq 2$. *Il existe deux constantes positives* A_q *et* B_q, *et un* $t_q \in\,]0,1[$ *tels que*

$$g_q(t) + A_q \geqq B_q g_q(s) \tag{20}$$

pour

$$\{(t,s) \in [-1,1]^2 \mid (t \leqq t_q) \vee (t > t_q \wedge s \geqq 2t^2-1)\}.$$

Démonstration: Naturellement le corollaire dit seulement quelque chose d'intérêt quand $q \geqq 3$, parce que g_2 est continue sur l'intervalle $[-1,1]$.

Soit $q \geqq 3$. Nous savons que $g_q^{(n)}(t) \to -\infty$, si $n \geqq 0$, quand $t \to 1$, et par conséquent $g_q(t)$ est négative et décroissante, dès que t est suffisamment voisin à 1. Soit B_q une constante telle que $B_q > 2^{q-3}$. D'après le lemme 3.8 il existe un $t_q \in\,]0,1[$ tel que:

(α) g_q est décroissante et négative sur l'intervalle $[2t_q^2 - 1, 1]$.

(β) Pour $t \in [t_q, 1[$, on ait $\dfrac{g_q(t)}{g_q(2t^2-1)} < B_q$.

Comme g_q est semi-continue supérieurement sur $[-1,1]$ il existe un $M > 0$ tel que

$$g_q(t) \leqq M \qquad \text{pour } t \in [-1, 1], \tag{21}$$

et comme g_q est continue sur $[-1, t_q]$ il existe un $A_q > 0$ tel que

$$g_q(t) + A_q \geqq MB_q \qquad \text{pour } t \in [-1, t_q]. \tag{22}$$

Nous allons démontrer que

$$g_q(t) + A_q \geqq B_q g_q(s),$$

pour toutes (t,s) dans l'ensemble indiqué.

L'assertion est vrai pour $t = s = 1$ parce que $g_q(1) = -\infty$.

Si $t \in]t_q, 1[$ et $s \geqq 2t^2 - 1$, on a d'après (α) et (β)

$$g_q(2t^2-1) < 0 \quad \text{et} \quad g_q(t) > B_q g_q(2t^2-1) \geqq B_q g_q(s),$$

et par conséquent

$$g_q(t) + A_q > g_q(t) > B_q g_q(s).$$

Enfin, si $t \in [-1, t_q]$ et $s \in [-1, 1]$, on a

$$B_q g_q(s) \leqq B_q M \leqq g_q(t) + A_q,$$

en vertu de (21) et (22). /

Chapitre 4

LA THÉORIE DU POTENTIEL SPHÉRIQUE

§ 1. *Fonctions harmoniques dans Ω_q*

Par fonctions harmoniques dans une variété de Riemann on entend le plus souvent les solutions f de l'équation de Laplace $\varDelta^* f = 0$, où $\varDelta^*$ est l'opérateur de Laplace-Beltrami. Ce que nous allons appeler les fonctions harmoniques dans Ω_q, seront les solutions f de l'équation

$$\{\varDelta_q^* + (q-1)\} f = 0,$$

autrement dit, les solutions f de l'équation $D_q^* f = 0$.

Il est possible de caractériser les fonctions harmoniques par des propriétés de moyenne. Nous préférons de commencer de cette manière.

Pour $a \in \Omega_q$ et $\varrho \in \left]0, \frac{1}{2}\pi\right[$ on pose

$$C(a,\varrho) = \{\xi \in \Omega_q \mid a \cdot \xi \geqq \cos\varrho\}, \quad S(a,\varrho) = \{\xi \in \Omega_q \mid a \cdot \xi = \cos\varrho\},$$

et on appelle $C(a,\varrho)$ et $S(a,\varrho)$ le disque sphérique et le cercle sphérique de centre a et de rayon sphérique ϱ. Le disque sphérique $C(a,\varrho)$ porte la mesure ω_q, et a la masse totale

$$m(\varrho) = \omega_q(C(a,\varrho)) = \|\omega_{q-1}\| \int_{\cos\varrho}^{1} (1-t^2)^{\frac{1}{2}(q-3)}\,dt. \tag{1}$$

Le cercle sphérique $S(a,\varrho)$ est une sphère de dimension $q-2$, de centre $a\cos\varrho$ et de rayon $\sin\varrho$. Il porte la mesure de surface σ_ϱ donnée par

$$d\sigma_\varrho(\eta) = \sin^{q-2}\varrho\, d\omega_{q-1}\left(\frac{\eta}{\sin\varrho}\right). \tag{2}$$

Elle a la masse totale $\|\omega_{q-1}\| \sin^{q-2}\varrho$.

Soient ω un ouvert de Ω_q, et $f\colon \omega \to \mathbf{R}$ une fonction continue, et soit $C(a,\varrho) \subseteq \omega$ pour un $\varrho \in \left]0, \frac{1}{2}\pi\right[$. Noterons $\mathscr{M}_f^\varrho(a)$ la moyenne de f sur le cercle sphérique $S(a,\varrho)$, i.e.

$$\mathscr{M}_f^\varrho(a) = (\|\omega_{q-1}\|\sin^{q-2}\varrho)^{-1} \int_{S(a,\varrho)} f(\xi)\,d\sigma_\varrho(\xi), \tag{3}$$

et poserons

$$\mathscr{A}_f^\varrho(a) = \frac{1}{\|\omega_{q-1}\|} \int_{C(a,\varrho)} f(\xi)\,d\omega_q(\xi). \tag{4}$$

Donc $\|\omega_{q-1}\| m(\varrho)^{-1} \mathscr{A}_f^\varrho(a)$ est la moyenne de f dans le disque sphérique $C(a,\varrho)$. Les expressions (3) et (4) gardent leurs sens, si f est seulement semi-continue dans ω. On voit que

$$\mathscr{M}_f^\varrho(a) = \frac{1}{\|\omega_{q-1}\|} \int_{a\cdot\eta=0} f(a\cos\varrho + \eta\sin\varrho)\,d\omega_{q-1}(\eta), \tag{5}$$

et que

$$\mathscr{A}_f^\varrho(a) = \int_{\cos\varrho}^{1} (1-t^2)^{\frac{1}{2}(q-3)} \mathscr{M}_f^{\operatorname{Arccos} t}(a)\,dt = \int_0^\varrho \sin^{q-2} u\, \mathscr{M}_f^u(a)\,du. \tag{6}$$

Dans les applications il est important d'observer qu'on peut considérer la moyenne $\mathscr{M}_f^\varrho(a)$ comme une moyenne sur le groupe $O(q,a)$, le sous-groupe des rotations de $O(q)$ qui laissent a fixe.

Soit μ la mesure de Haar normalisée sur le groupe compact $O(q,a)$, et soit ξ un point de $S(a,\varrho)$. L'application $\mathscr{C}(S(a,\varrho)) \to \mathbf{R}$, donnée par

$$\varphi \longmapsto \int\limits_{O(q,a)} \varphi(A\xi)\,d\mu(A),$$

est une mesure positive sur $S(a,\varrho)$. Cette mesure est invariante par rapport au groupe $O(q,a)$, et a la masse totale 1. Donc, elle satisfait aux conditions, qui caractérisent la mesure de surface normalisée $\varphi \longmapsto \mathscr{M}_\varphi^\varrho(a)$ de $S(a,\varrho)$, et nous avons démontré le lemme suivant:

LEMME 4.1. *Quels que soient* $a \in \Omega_q$, $\varrho \in]0,\frac{1}{2}\pi[$, $\xi \in S(a,\varrho)$, *pour toute* $\varphi \in \mathscr{C}(S(a,\varrho))$ *on ait*

$$\int\limits_{O(q,a)} \varphi(A\xi)\,d\mu(A) = \mathscr{M}_\varphi^\varrho(a).$$

Évidemment ce lemme est valable non seulement pour les fonctions continues, mais aussi par exemple pour les fonctions semi-continues.

Soient $f \in \mathscr{C}(\Omega_q)$ et $\varrho \in]0,\frac{1}{2}\pi[$. On désigne par $\mathscr{M}_f^\varrho$ la fonction $a \longmapsto \mathscr{M}_f^\varrho(a)$ de Ω_q dans $\mathbf{R}$. Elle est continue. Par $f \longmapsto \mathscr{M}_f^\varrho$ on définit un opérateur linéaire continu dans $\mathscr{C}(\Omega_q)$. Plus tard nous aurons besoin de savoir qu'il est symétrique; c'est-à-dire qu'on a:

LEMME 4.2. *Soient* $f, g \in \mathscr{C}(\Omega_q)$ *et* $\varrho \in]0,\frac{1}{2}\pi[$, *alors*

$$\int\limits_{\Omega_q} \mathscr{M}_f^\varrho(\xi)\,g(\xi)\,d\omega_q(\xi) = \int\limits_{\Omega_q} f(\xi)\,\mathscr{M}_g^\varrho(\xi)\,d\omega_q(\xi).$$

Démonstration: Remarquons d'abord que si $f \in \mathscr{C}(\Omega_q)$, $a \in \Omega_q$, l'application

$$\varrho \longmapsto \mathscr{A}_f^\varrho(a) = \frac{1}{\|\omega_{q-1}\|} \int\limits_{C(a,\varrho)} f(\xi)\,d\omega_q(\xi)$$

est dérivable avec la dérivée continue

$$\sin^{q-2}\varrho\,\mathscr{M}_f^\varrho(a).$$

Ensuite posons

$$K_\varrho = \{(\xi,\eta) \in \Omega_q^2 \mid \xi\cdot\eta \geqq \cos\varrho\}.$$

Grâce au théorème de Fubini pour la fonction

$$(\xi,\eta) \longmapsto 1_{K_\varrho}(\xi,\eta) f(\xi) g(\eta)$$

de $\Omega_q \times \Omega_q$ dans $\mathbf{R}$, on obtient

$$\int\limits_{\Omega_q} \Big(f(\xi) \int\limits_{C(\xi,\varrho)} g(\eta)\, d\omega_q(\eta) \Big) d\omega_q(\xi) = \int\limits_{\Omega_q} \Big(g(\eta) \int\limits_{C(\eta,\varrho)} f(\xi)\, d\omega_q(\xi) \Big) d\omega_q(\eta).$$

Selon l'observation ci-dessus on peut dériver cette équation sous le signe d'intégration par rapport à ϱ, donc

$$\int\limits_{\Omega_q} f(\xi) \sin^{q-2}\varrho\, \mathscr{M}_g^\varrho(\xi)\, d\omega_q(\xi) = \int\limits_{\Omega_q} g(\eta) \sin^{q-2}\varrho\, \mathscr{M}_f^\varrho(\eta)\, d\omega_q(\eta),$$

ce qui prouve le lemme. /

On voit sans difficultés que le lemme 4.2 est encore valable pour des fonctions semi-continues.

Il est important pour la théorie du potentiel sphérique d'avoir un théorème qui montre que $D_q^* f(a)$ est déterminé par les moyennes $\mathscr{M}_f^\varrho(a)$. Voici un résultat très précis.

THÉORÈME 4.3. *Soient ω un ouvert de Ω_q, $f \in C^2(\omega)$. Pour tout point $a \in \omega$, on a*

$$D_q^* f(a) = \lim_{\varrho \to 0} \frac{2\cos\varrho}{\sin^2\varrho} \left(\mathscr{M}_f^\varrho(a) - \cos\varrho f(a) \right),$$

uniformément dans a sur tout compact $\varkappa$ de ω.

Démonstration: Nous prolongeons f par homogénéité positive au cône ouvert $K_\omega = \{\lambda\xi \mid \lambda > 0, \xi \in \omega\}$ de base ω et de sommet 0, i.e. nous définissons

$$\tilde{f} : K_\omega \to \mathbf{R} \quad \text{par} \quad \tilde{f}(\lambda\xi) = \lambda f(\xi).$$

Alors $\tilde{f} \in C^2(K_\omega)$.

Soit $\varkappa$ un compact de ω. Il existe un $\varrho_0 \in]0, \tfrac{1}{2}\pi[$ tel que pour $\varrho \leqq \varrho_0$, $a \in \varkappa$, on ait $C(a,\varrho) \subseteq \omega$. Posons

$$\Lambda = \{(a,\eta) \in \Omega_q^2 \mid a \in \varkappa,\ a \cdot \eta = 0\}.$$

Grâce à la formule de Taylor, pour $(a,\eta) \in \Lambda$, $\varrho \leqq \varrho_0$, on a

$$\left.\begin{aligned} f(a\cos\varrho + \eta\sin\varrho) - \tilde{f}(a\cos\varrho) &= \\ d\tilde{f}(a\cos\varrho; \eta\sin\varrho) + \tfrac{1}{2} d^2\tilde{f}(a\cos\varrho; \eta\sin\varrho) &+ \tfrac{1}{2}\sin^2\varrho\,\alpha(a,\eta,\varrho), \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

où $\alpha(a,\eta,\varrho) \to 0$ quand $\varrho \to 0$, uniformément pour $(a,\eta) \in \Lambda$. Fixons $a \in \varkappa$, et introduisons une base orthonormale $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_q$ de $\mathbf{R}^q$ telle que $a = \varepsilon_q$. Si le point $x \in K_\omega$ possède les coordonnées $x_1,\cdots,x_q$ dans cette base, nous écrivons

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}(x_1,\cdots,x_q).$$

Alors

$$d\tilde{f}(a\cos\varrho;\eta\sin\varrho) = \sin\varrho\sum_{i=1}^{q-1}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x_i}(a\cos\varrho)(\eta\cdot\varepsilon_i),$$

et

$$d^2\tilde{f}(a\cos\varrho;\eta\sin\varrho) = \sin^2\varrho\sum_{i,j=1}^{q-1}\frac{\partial^2\tilde{f}}{\partial x_i\partial x_j}(a\cos\varrho)(\eta\cdot\varepsilon_i)(\eta\cdot\varepsilon_j).$$

Pour $i = 1,\cdots,q-1$ on a

$$\frac{1}{\|\omega_{q-1}\|}\int\limits_{\eta\cdot a=0}(\eta\cdot\varepsilon_i)\,d\omega_{q-1}(\eta) = 0,\quad \frac{1}{\|\omega_{q-1}\|}\int\limits_{\eta\cdot a=0}(\eta\cdot\varepsilon_i)(\eta\cdot\varepsilon_j)\,d\omega_{q-1}(\eta) = \frac{\delta_{ij}}{q-1},$$

donc, en formant la moyenne sur $\eta\cdot a = 0$ dans (7), on obtient

$$\mathscr{M}_f^\varrho(a) - \tilde{f}(a\cos\varrho) = \frac{\sin^2\varrho}{2(q-1)}\sum_{i=1}^{q-1}\frac{\partial^2\tilde{f}}{\partial x_i^2}(a\cos\varrho) + \tfrac{1}{2}\sin^2\varrho\,\beta(a,\varrho), \tag{8}$$

où nous avons posé

$$\beta(a,\varrho) = \frac{1}{\|\omega_{q-1}\|}\int\limits_{\eta\cdot a=0}\alpha(a,\eta,\varrho)\,d\omega_{q-1}(\eta). \tag{9}$$

On voit que $\beta(a,\varrho) \to 0$ quand $\varrho \to 0$, uniformément pour $a \in \varkappa$.

La droite $\{\lambda a \mid \lambda \in \mathbf{R}\}$ est décrite par $\{(0,\cdots,0,x_q) \mid x_q \in \mathbf{R}\}$, et puisque

$$\tilde{f}(0,\cdots,0,x_q) = x_q f(a)$$

pour $x_q > 0$, on conclut que

$$\frac{\partial^2\tilde{f}}{\partial x_q^2}(a\cos\varrho) = \frac{\partial^2\tilde{f}}{\partial x_q^2}(0,\cdots,0,\cos\varrho) = 0.$$

Par conséquent (8) s'écrit

$$\mathscr{M}_f^\varrho(a) - \cos\varrho f(a) = \frac{\sin^2\varrho}{2(q-1)}\Delta_q\tilde{f}(a\cos\varrho) + \tfrac{1}{2}\sin^2\varrho\,\beta(a,\varrho). \tag{10}$$

D'après (3) de la proposition 2.6 on a

$$\Delta_q \tilde{f}(a\cos\varrho) = \frac{q-1}{\cos\varrho} f(a) + \frac{1}{\cos\varrho} \Delta_q^* f(a),$$

et par suite

$$\frac{2}{\sin^2\varrho}(\mathscr{M}_f^\varrho(a) - \cos\varrho f(a)) = \frac{1}{\cos\varrho}\left(f(a) + \frac{1}{q-1}\Delta_q^* f(a)\right) + \beta(a,\varrho), \tag{11}$$

d'où

$$D_q^* f(a) = \frac{2\cos\varrho}{\sin^2\varrho}(\mathscr{M}_f^\varrho(a) - \cos\varrho f(a)) - \cos\varrho\beta(a,\varrho), \tag{12}$$

ce qui entraîne le théorème. /

Remarquons que le lemme 4.2 et le théorème 4.3 entraînent (5) de la proposition 2.6 avec Δ_q^* remplacé par D_q^*, et par conséquent aussi (5) lui-même.

DÉFINITION: *On dit qu'une fonction* f: $\omega \to \mathbf{R}$ *définie dans un ouvert* ω *de* Ω_q *est harmonique dans* ω, *si elle est continue, et si elle vérifie les conditions équivalentes*:

(i) *Pour tout* $C(a,\varrho) \subseteq \omega$ *où* $\varrho \in]0, \frac{1}{2}\pi[$ *on a*

$$\mathscr{M}_f^\varrho(a) = \cos\varrho f(a).$$

(ii) *Pour tout* $C(a,\varrho) \subseteq \omega$ *où* $\varrho \in]0, \frac{1}{2}\pi[$ *on a*

$$\mathscr{A}_f^\varrho(a) = \frac{\sin^{q-1}}{q-1} f(a).$$

Que (i) entraîne (ii) résulte de la formule (6). Inversement si (ii) est remplit, et si $a \in \omega$ est fixe, on conclut que

$$\int_0^\varrho \sin^{q-2} u \mathscr{M}_f^u(a)\,du = \frac{\sin^{q-1}\varrho}{q-1} f(a)$$

pour $\varrho \in]0, \varrho_0[$, où $\varrho_0 = \sup\{\varrho \in]0, \frac{1}{2}\pi[\mid C(a,\varrho) \subseteq \omega\}$, ce qui par dérivation entraîne (i).

PROPOSITION 4.4. *Soit* f *une fonction harmonique dans l'ouvert* $\omega \subseteq \Omega_q$. *Alors* f *est indéfiniment dérivable dans* ω *et* $D_q^* f(a) = 0$ *pour tout* $a \in \omega$.

La démonstration de l'énoncé $f \in C^\infty(\omega)$ se fait exactement comme dans la théorie classique, à l'aide de l'unité approchée $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0,1[}$ de Ω_q. En vertu du théorème 4.3 il est évident que $D_q^* f(a) = 0$ pour tout $a \in \omega$.

La théorie des fonctions harmoniques s'achève par la proposition inverse:

PROPOSITION 4.5. *Soit ω un ouvert de Ω_q, et soit $f \in C^2(\omega)$ une fonction telle que $D_q^* f(a) = 0$ pour tout $a \in \omega$. Alors f est harmonique dans ω.*

Démonstration: Soit $a \in \omega$ et posons

$$\varrho_0 = \sup\{\varrho \in]0, \tfrac{1}{2}\pi[\mid C(a,\varrho) \subseteq \omega\}.$$

Soit $\varphi : \mathring{C}(a,\varrho_0) \to \mathbf{R}$ la fonction définie dans l'intérieur de $C(a,\varrho_0)$ par (cf. le lemme 4.1)

$$\varphi(\xi) = \int_{O(q,a)} f(A\xi)\,d\mu(A) = \begin{cases} \mathscr{M}_f^\varrho(a), & \text{si } \xi \neq a, \varrho = \operatorname{Arccos}(a\cdot\xi). \\ f(a), & \text{si } \xi = a. \end{cases}$$

La fonction φ est de la classe C^2 dans l'ouvert $\mathring{C}(a,\varrho_0)$, et en vertu de (6) de la proposition 2.6 on a

$$D_q^*\varphi(\xi) = \int_{O(q,a)} D_q^*(f\circ A)(\xi)d\mu(A) = \int_{O(q,a)} D_q^* f(A\xi)\,d\mu(A) = 0. \tag{13}$$

En outre φ ne dépend que de $t = a\cdot\xi$, c'est-à-dire φ est constante sur les cercles sphériques $S(a,\varrho)$ où $\varrho < \varrho_0$.

(a) *Soit* $q = 2$. Nous paramétrisons $\mathring{C}(a,\varrho_0)$ par $(\cos\varrho, \sin\varrho)$, $\varrho \in]-\varrho_0, \varrho_0[$, et considérons φ comme fonction de ϱ. D'après (13) on a alors

$$\varphi''(\varrho) + \varphi(\varrho) = 0, \quad \varrho \in]-\varrho_0, \varrho_0[, \tag{14}$$

et puisque $\varphi(\varrho) = \varphi(-\varrho)$ et $\varphi(0) = f(a)$, on obtient

$$\varphi(\varrho) = f(a)\cos\varrho. \tag{15}$$

(b) *Soit* $q \geqq 3$. Utilisons la représentation paramétrique de $\mathring{C}(a,\varrho_0)\setminus\{a\}$:

$$\xi = ta + (1-t^2)^{\frac{1}{2}}\eta \quad \text{où} \quad t \in]\cos\varrho_0, 1[, \quad \eta\cdot a = 0.$$

Alors d'après (13), et (4) de la proposition 2.6 on a

$$(1-t^2)\frac{d^2\varphi}{dt^2} - (q-1)\,t\frac{d\varphi}{dt} + (q-1)\varphi(t) = 0, \quad t \in]\cos\varrho_0, 1[,$$

parce que φ ne dépend pas de η. Selon le lemme 3.6 il existe deux constantes $k_1, k_2 \in \mathbf{R}$ telles que

$$\varphi(t) = k_1 t + k_2 \varphi_q(t), \quad t \in \,]\cos\varrho_0, 1[.$$

Quand $t \to 1$ on a $\varphi(t) \to f(a)$, tandis que $\varphi_q(t) \to \infty$. Il en découle que $k_2 = 0$, et que

$$\varphi(t) = f(a)t, \quad t \in \,]\cos\varrho_0, 1[. \tag{16}$$

Les formules (15) et (16) s'expriment

$$\mathscr{M}_f^\varrho(a) = \cos\varrho f(a), \quad \varrho \in \,]0, \varrho_0[,$$

ce qui démontre la proposition. /

Soit ω un ouvert de Ω_q. On désigne par K_ω le cône ouvert de base ω et de sommet 0, i.e.

$$K_\omega = \{\lambda\xi \mid \lambda > 0, \xi \in \omega\}.$$

Une fonction $f : \omega \to \mathbf{R}$ se prolonge par homogénéité positive à la fonction $\tilde{f} : K_\omega \to \mathbf{R}$ donnée par

$$\tilde{f}(\lambda\xi) = \lambda f(\xi).$$

Alors on a $f \in C^p(\omega)$ si et seulement si $\tilde{f} \in C^p(K_\omega)$ pour $p = 0, 1, \cdots, \infty$, et si $f \in C^2(\omega)$ on sait que

$$\Delta_q \tilde{f}(r\xi) = \frac{q-1}{r} D_q^* f(\xi) \quad \text{pour} \quad r > 0, \xi \in \omega.$$

Donc

$$D_q^* f \begin{Bmatrix} \geqq \\ = \\ \leqq \end{Bmatrix} 0 \text{ dans } \omega, \text{ si et seulement si } \Delta_q \tilde{f} \begin{Bmatrix} \geqq \\ = \\ \leqq \end{Bmatrix} 0 \text{ dans } K_\omega. \tag{17}$$

Résumons les résultats précédents dans le théorème suivant:

THÉORÈME 4.6. *Soient ω un ouvert de Ω_q, $f \in C^\infty(\omega)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes à l'harmonicité de f dans ω:*

(i) *Pour tout $C(a, \varrho) \subseteq \omega$ où $\varrho \in \,]0, \frac{1}{2}\pi[$ on a*
$$\mathscr{M}_f^\varrho(a) = \cos\varrho f(a).$$

(ii) *Pour tout $C(a, \varrho) \subseteq \omega$ où $\varrho \in \,]0, \frac{1}{2}\pi[$ on a*
$$\mathscr{A}_f^\varrho(a) = \frac{\sin^{q-1}\varrho}{q-1} f(a).$$

(iii) *Pour tout $a \in \omega$ on a $D_q^* f(a) = 0$.*

(iv) *La fonction prolongée $\tilde{f}$ est harmonique au sens classique dans K_ω.*

D'après le corollaire 2.15 les fonctions harmoniques dans tout Ω_q sont les fonctions $H_1 = \{a \cdot \xi \mid a \in \mathbf{R}^q\}$. Dans un ouvert différent de Ω_q il y a par contre plus de fonctions harmoniques que celles-ci. Par exemple dans $\Omega_q \setminus \{a, -a\}$ on a la fonction harmonique $\xi \longmapsto \varphi_q(a \cdot \xi)$, où φ_q est la solution du lemme 3.6.

Remarquons que les fonctions harmoniques dans un ouvert connexe ω différent de Ω_q satisfont aux axiomes de M. Brelot [5] comme démontré par R. M. Hervé [13]. Par conséquent on pourrait compléter la précédente par plusieurs théorèmes, par exemple par le principe du maximum.

§ 2. *Fonctions sousharmoniques dans Ω_q*

DÉFINITION: *Soit ω un ouvert de Ω_q. On dit qu'une fonction $f: \omega \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ est sousharmonique dans ω, si elle vérifie les conditions suivantes:*

(i) *La fonction f est semi-continue supérieurement.*

(ii) *La fonction f est localement ω_q-intégrable.*

(iii) *Pour tout $C(a,\varrho) \subseteq \omega$ où $\varrho \in \left]0, \frac{1}{2}\pi\right[$ on a*

$$\cos\varrho f(a) \leqq \mathscr{M}_f^\varrho(a).$$

On dit qu'une fonction $f: \omega \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ est *surharmonique* dans ω, si $-f$ est sousharmonique dans ω. Donc, une fonction $f: \omega \to \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ est harmonique dans ω, si et seulement si f est à la fois sousharmonique et surharmonique dans ω.

Si f est sousharmonique il résulte de (6) qu'on a pour tout $C(a,\varrho) \subseteq \omega$ où $\varrho \in \left]0, \frac{1}{2}\pi\right[$

$$\frac{\sin^{q-1}\varrho}{q-1} f(a) \leqq \mathscr{A}_f^\varrho(a). \tag{18}$$

Si on supprime la condition (ii), on appelle f sousharmonique au sens large, et on montre – exactement comme chez M. Brelot [6] p. 22 – qu'une fonction sousharmonique au sens large est ou bien localement ω_q-intégrable ou bien identique à $-\infty$ dans chaque composante connexe de ω.

PROPOSITION 4.7. *Soit ω un ouvert de Ω_q, et soit f une fonction sousharmonique dans ω. Alors pour tout $a \in \omega$ on a*

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{q-1}{\sin^{q-1}\varrho} \mathscr{A}_f^\varrho(a) = f(a).$$

Démonstration: Soient $a \in \omega$, $\varrho \in \left]0, \frac{1}{2}\pi\right[$. Nous savons que

$$\frac{m(\varrho)}{\|\omega_{q-1}\|} = \int_{\cos\varrho}^{1} (1-t^2)^{\frac{1}{2}(q-3)}\,dt, \quad \frac{\sin^{q-1}\varrho}{q-1} = \int_{\cos\varrho}^{1} t(1-t^2)^{\frac{1}{2}(q-3)}\,dt,$$

et par conséquent

$$\frac{m(\varrho)\cos\varrho}{\|\omega_{q-1}\|} \leqq \frac{\sin^{q-1}\varrho}{q-1} \leqq \frac{m(\varrho)}{\|\omega_{q-1}\|},$$

donc

$$1 \leqq \frac{(q-1)\,m(\varrho)}{\|\omega_{q-1}\|\sin^{q-1}\varrho} \leqq \frac{1}{\cos\varrho}.$$

Soit $k > f(a) \geqq 0$. Choisissons un $\delta < 1$ tel que $k\delta > f(a)$. Puisque f est semicontinue supérieurement, il existe un $\varrho_0 \in \left]0, \frac{1}{2}\pi\right[$ tel que $C(a,\varrho_0) \subseteq \omega$ et $f(\xi) < k\delta$ pour tout $\xi \in C(a,\varrho_0)$. Donc

$$\frac{\|\omega_{q-1}\|}{m(\varrho)}\mathscr{A}_f^{\varrho}(a) \leqq k\delta$$

pour tout $\varrho \leqq \varrho_0$, et par conséquent d'après (18)

$$f(a) \leqq \frac{q-1}{\sin^{q-1}\varrho}\mathscr{A}_f^{\varrho}(a) \leqq \frac{(q-1)\,m(\varrho)}{\|\omega_{q-1}\|\sin^{q-1}\varrho}k\delta \leqq \frac{k\delta}{\cos\varrho} \leqq k,$$

dès que $\varrho \leqq \varrho_0$ et $\cos\varrho \geqq \delta$. Puisque $k > f(a)$ était arbitraire, la proposition est prouvée. Si $f(a) < 0$ on procède pareillement. /

COROLLAIRE 4.8. *Soient f et g deux fonctions sousharmoniques dans un ouvert ω de Ω_q. Si f et g sont égaux ω_q-presque partout dans ω, ils sont identiques dans ω.*

Ce corollaire sera très important dans la suite.

Nous allons démontrer un théorème sur les fonctions sousharmoniques correspondant au théorème 4.6 (pour la notation cf. ce théorème).

THÉORÈME 4.9. *Soit ω un ouvert de Ω_q, et soit $f \in C^2(\omega)$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *La fonction f est sousharmonique dans ω.*

(ii) *Pour tout $a \in \omega$ on a $D_q^* f(a) \geqq 0$.*

(iii) *La fonction $\tilde{f}$ est sousharmonique au sens classique dans K_ω.*

Démonstration: De (17) on voit que (ii) est équivalent à (iii), et c'est une conséquence immédiate du théorème 4.3 que (i) entraîne (ii). Il n'est pas si facile de démontrer que (ii) entraîne (i). L'assertion est un cas particulier de la théorie générale, développée par R. M. Hervé [13], pour les solutions d'une équation $\Phi f + cf \geqq 0$, où Φ est un opérateur différentiel du second ordre, de type elliptique, et où c est une constante. L'idée de la démonstration est d'utiliser le principe du maximum de E. Hopf, qui est valable quand $c \leqq 0$. Dans le cas $c > 0$ (comme ici) il faut procéder autrement, soit par un lemme de D. Gilbarg et J. Serrin (cf. [13] § 34).

Cependant, dans notre cas simple, une démonstration élémentaire se fait. Nous aurons besoin du principe du maximum pour les fonctions positivement homogènes et sousharmoniques dans $\mathbf{R}^q$.

LEMME 4.10. *Dans l'hyperplan $x_q = 1$ de $\mathbf{R}^q$ on considère pour $k > 0$ la boule*

$$B_k = \left\{ x \in \mathbf{R}^q \mid x_q = 1, \sum_{i=1}^{q-1} x_i^2 \leqq k^2 \right\},$$

qui est la base du cône $C_k = \{\lambda x \mid \lambda \geqq 0, \ x \in B_k\}$. Soit $F : C_k \to \mathbf{R}$ une fonction continue et positivement homogène. On suppose de plus $F \in C^2(\mathring{C}_k)$ et $\Delta_q F(x) \geqq 0$ pour tout $x \in \mathring{C}_k$. Si $F \leqq 0$ sur la frontière du cône, alors $F \leqq 0$ dans C_k.

Démonstration: Soit $(u_1, \cdots, u_{q-1}, 1) \in B_k$. Nous posons

$$f(u_1, \cdots, u_{q-1}) = F(u_1, \cdots, u_{q-1}, 1),$$

alors f est une fonction continue dans B_k, et $f \in C^2(\mathring{B}_k)$.

Il suffit de montrer $f \leqq 0$ dans B_k. Si $x \in \mathring{C}_k$ alors $x_q > 0$, et grâce à l'homogénéité de F on a

$$x_q f\left(\frac{x_1}{x_q}, \cdots, \frac{x_{q-1}}{x_q}\right) = F(x_1, \cdots, x_q). \tag{19}$$

Un calcul facile montre

$$\Delta_q F(x_1, \cdots, x_q) = \sum_{i=1}^{q-1} \left(\frac{1}{x_q} + \frac{x_i^2}{x_q^3}\right) \frac{\partial^2 f}{\partial u_i^2}\left(\frac{x_1}{x_q}, \cdots, \frac{x_{q-1}}{x_q}\right) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{q-1} \frac{x_i x_j}{x_q^3} \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}\left(\frac{x_1}{x_q}, \cdots, \frac{x_{q-1}}{x_q}\right), \tag{20}$$

et si $x_q = 1$, $u_i = x_i$ pour $i = 1, \cdots, q-1$, la formule (20) se réduit à

$$\Delta_q F(x_1, \cdots, x_{q-1}, 1) = \sum_{i=1}^{q-1} (1 + u_i^2) \frac{\partial^2 f}{\partial u_i^2}(u_1, \cdots, u_{q-1}) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{q-1} u_i u_j \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}(u_1, \cdots, u_{q-1}). \tag{21}$$

Nous sommes conduits à considérer l'opérateur différentiel L du second ordre dans $\mathring{B}_k$, donné par

$$L = \sum_{i,j=1}^{q-1} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j}, \quad \text{où} \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 + u_i^2 & \text{si} \quad i = j. \\ u_i u_j & \text{si} \quad i \neq j. \end{cases}$$

L'opérateur L est de type elliptique, et nous savons que $Lf \geqq 0$ dans $\mathring{B}_k$. Le principe du maximum de E. Hopf (cf. [12] p. 86) valable pour f, entraîne l'impossibilité d'un maximum sans constance au voisinage, et puisque $f \leqq 0$ sur la frontière de B_k, il en résulte que $f \leqq 0$ dans B_k. /

Retournons à la démonstration du fait que (ii) entraîne (i) du théorème 4.9.

Soient $a \in \omega$, $C(a, \varrho_0) \subseteq \omega$. Nous allons démontrer que

$$\cos \varrho_0 f(a) \leqq \mathscr{M}_f^{\varrho_0}(a).$$

Soit $\varphi : C(a, \varrho_0) \to \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$\varphi(\xi) = \int_{O(q,a)} f(A\xi)\, d\mu(A) = \begin{cases} \mathscr{M}_f^{\varrho}(a) & \text{si} \quad \xi \neq a, \quad \varrho = \operatorname{Arccos}(a \cdot \xi). \\ f(a) & \text{si} \quad \xi = a. \end{cases}$$

On voit que φ est continue dans $C(a, \varrho_0)$, de la classe C^2 dans $\mathring{C}(a, \varrho_0)$, et que $D_q^* \varphi \geqq 0$ dans $\mathring{C}(a, \varrho_0)$ (cf. la proposition 4.5).

Soit $\psi : C(a, \varrho_0) \to \mathbf{R}$ définie par

$$\psi(\xi) = \varphi(\xi) - \frac{a \cdot \xi}{\cos \varrho_0} \mathscr{M}_f^{\varrho_0}(a).$$

Alors ψ est continue dans $C(a, \varrho_0)$ et $\psi \in C^2(\mathring{C}(a, \varrho_0))$. De plus on a $\psi = 0$ sur la frontière de $C(a, \varrho_0)$, et $D_q^* \psi = D_q^* \varphi \geqq 0$ dans $\mathring{C}(a, \varrho_0)$, parce que $a \cdot \xi$ est harmonique dans $\mathring{C}(a, \varrho_0)$.

Soit $\tilde{\psi} : K_{C(a,\varrho_0)} \to \mathbf{R}$ la fonction définie dans le cône

$$K_{C(a,\varrho_0)} = \{\lambda \xi \mid \lambda \geqq 0, \xi \in C(a, \varrho_0)\}$$

par $\tilde{\psi}(\lambda \xi) = \lambda \psi(\xi)$. D'après (17) la fonction $\tilde{\psi}$ satisfait aux conditions du lemme 4.10 – $\tilde{\psi}$ est même nulle sur la frontière du cône – et on y conclut

$$\varphi(\xi) \leqq \frac{a \cdot \xi}{\cos \varrho_0} \mathscr{M}_f^{\varrho_0}(a) \quad \text{pour tout } \xi \in C(a, \varrho_0).$$

Posant $\xi = a$, on obtient l'inégalité désirée

$$\cos \varrho_0 f(a) \leqq \mathscr{M}_f^{\varrho_0}(a). \;/$$

(Si on pose $\cos\varrho = a\cdot\xi$, on obtient

$$\frac{\mathscr{M}_f^\varrho(a)}{\cos\varrho} \leqq \frac{\mathscr{M}_f^\varrho(a)}{\cos\varrho_0} \quad \text{pour} \quad \varrho \in]0, \varrho_0[,$$

i.e. l'application

$$\varrho \longmapsto \frac{\mathscr{M}_f^\varrho(a)}{\cos\varrho}$$

est croissante. Il n'est pas difficile d'étendre ce résultat à toute fonction sousharmonique.)

Remarque: Le théorème 4.9 reste valable pour toute fonction $f:\omega \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ semi-continue supérieurement et localement ω_q-intégrable, si on exprime la condition (ii) en disant que $D_q^* f$ est une distribution positive.

Nous n'entrons pas dans la démonstration, parce que nous n'utiliserons pas cette extension du théorème 4.9 dans la suite.

§ 3. *Potentiels sphériques*

DÉFINITION: *Étant donnée une mesure positive μ sur Ω_q, on appelle potentiel sphérique de μ la fonction $S^\mu = g_q * \mu : \Omega_q \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$. Pour tout $\xi \in \Omega_q$ on a*

$$S^\mu(\xi) = \frac{1}{\|\omega_{q-1}\|}\int_{\Omega_q} g_q(\xi\cdot\eta)\,d\mu(\eta).$$

En vertu des propriétés de g_q on a pour toute mesure positive $\mu \in \mathscr{M}_+(\Omega_q)$:

(i) *Le potentiel sphérique S^μ est semi-continu supérieurement. Dans deux dimensions ($q = 2$) il est même continu.*

(ii) *Le potentiel sphérique S^μ est indéfiniment dérivable dans le complémentaire du support de μ.*

(iii) *Le potentiel sphérique S^μ est ω_q-intégrable, i.e. $S^\mu \in \mathscr{L}^1(\Omega_q)$.* (Cf. la proposition 2.8.)

Nous allons démontrer un théorème sur la continuité d'un potentiel sphérique. Il est analogue au théorème dû à G. C. Evans et F. Vasilesco (cf. [6] p. 49) valable pour les potentiels classiques. Notre outil sera le corollaire 3.9, qui nous permet de démontrer le lemme suivant.

LEMME 4.11. *Soient μ une mesure positive sur Ω_q, $\varkappa$ un compact de Ω_q contenant le support de μ. Pour un $\xi \in \Omega_q$ on choisit un $\eta \in \varkappa$ tel que*

$$\operatorname{Arccos}(\xi \cdot \eta) = \inf_{\sigma \in \varkappa} \operatorname{Arccos}(\xi \cdot \sigma).$$

Alors

$$S^\mu(\xi) + A_q \frac{\|\mu\|}{\|\omega_{q-1}\|} \geqq B_q S^\mu(\eta).$$

Démonstration: Soit $\sigma \in \varkappa$. Alors

$$\operatorname{Arccos}(\eta \cdot \sigma) \leqq \operatorname{Arccos}(\eta \cdot \xi) + \operatorname{Arccos}(\xi \cdot \sigma) \leqq 2\operatorname{Arccos}(\xi \cdot \sigma).$$

Si $\operatorname{Arccos}(\xi \cdot \sigma) \in [0, \frac{1}{2}\pi]$ alors $t = \xi \cdot \sigma \in [0,1]$ et

$$s = \eta \cdot \sigma \geqq \cos(2\operatorname{Arccos}(\xi \cdot \sigma)) = 2t^2 - 1.$$

Donc, d'après 3.9

$$g_q(\xi \cdot \sigma) + A_q \geqq B_q g_q(\eta \cdot \sigma). \tag{22}$$

Si $\operatorname{Arccos}(\xi \cdot \sigma) \in]\frac{1}{2}\pi, \pi]$ alors $t = \xi \cdot \sigma \in [-1, 0[$, donc $t = \xi \cdot \sigma < t_q$ (t_q du corollaire 3.9), et par conséquent (22) subsiste encore. Puisque (22) est valable pour tout $\sigma \in \varkappa$, on obtient

$$\int_\varkappa g_q(\xi \cdot \sigma)\, d\mu(\sigma) + A_q \|\mu\| \geqq B_q \int_\varkappa g_q(\eta \cdot \sigma)\, d\mu(\sigma),$$

d'où

$$S^\mu(\xi) + A_q \frac{\|\mu\|}{\|\omega_{q-1}\|} \geqq B_q S^\mu(\eta). \ /$$

THÉORÈME 4.12. *Soient μ une mesure positive sur Ω_q, $\varkappa = \operatorname{supp}(\mu)$ son support compact. Soit $P: \varkappa \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ la restriction de S^μ à $\varkappa$.*

Si P est continue en un point $\xi_0 \in \varkappa$, alors S^μ est continue en ξ_0.

Le théorème est sans intérêt pour $q = 2$, parce que tout potentiel sphérique sur Ω_2 est continu.

Démonstration: Soit $q \geqq 3$, et soit P continue en $\xi_0 \in \varkappa$. Implicitement $P(\xi_0) = S^\mu(\xi_0)$ est fini, c'est-à-dire $g_q(\xi_0 \cdot\ )$ est μ-intégrable. On en déduit que

$$\{\xi_0\} \text{ est } \mu\text{-négligeable},$$

car il existe une constante k telle que $g_q + k \leqq 0$ sur $[-1, 1]$, d'où

$$g_q(\xi_0 \cdot \eta) + k \leqq -n 1_{\{\xi_0\}}(\eta) \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N},$$

parce que $g_q(1) = -\infty$. Par conséquent on a

$$\int_{\Omega_q} g_q(\xi_0 \cdot \eta)\, d\mu(\eta) + k\|\mu\| \leqq -n\mu(\{\xi_0\}) \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N},$$

ce qui entraîne $\mu(\{\xi_0\}) = 0$.

Soit B un disque sphérique ouvert quelconque de centre ξ_0, alors on a

$$\int_B g_q(\xi_0 \cdot \eta)\, d\mu(\eta) \to 0 \quad \text{et} \quad \int_B d\mu(\eta) \to 0, \tag{23}$$

quand le rayon sphérique de B tend vers zéro.

Soient μ_B et μ_{CB} les mesures induites par μ sur B et sur $CB = \Omega_q \setminus B$. Alors (23) s'exprime

$$S^{\mu_B}(\xi_0) \to 0 \quad \text{et} \quad \|\mu_B\| \to 0, \tag{24}$$

quand le rayon sphérique de B tend vers zéro.

Soit $\varepsilon > 0$, et choisissons B suffisamment petit pour que

$$|S^{\mu_B}(\xi_0)| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \|\mu_B\| < \varepsilon. \tag{25}$$

Le potentiel sphérique $S^{\mu_{CB}}$ est continu dans B. Puisque

$$S^{\mu} = S^{\mu_B} + S^{\mu_{CB}},$$

l'hypothèse entraîne la continuité en ξ_0 de la restriction de S^{μ_B} à $\varkappa$, donc il existe un $\varrho_0 \in]0, \frac{1}{2}\pi[$ tel que

$$|S^{\mu_B}(\xi)| < 2\varepsilon \quad \text{pour tout} \quad \xi \in C(\xi_0, \varrho_0) \cap \varkappa. \tag{26}$$

À tout $\xi \in \Omega_q$ on choisit $\eta \in \varkappa$ tel que

$$\operatorname{Arccos}(\xi \cdot \eta) = \inf_{\sigma \in \varkappa} \operatorname{Arccos}(\xi \cdot \sigma).$$

Alors $\xi \in C(\xi_0, \frac{1}{2}\varrho_0)$ entraîne $\eta \in C(\xi_0, \varrho_0)$, et par conséquent on trouve d'après 4.11

$$S^{\mu_B}(\xi) \geqq B_q S^{\mu_B}(\eta) - A_q \frac{\|\mu_B\|}{\|\omega_{q-1}\|} \geqq -\varepsilon\left(2B_q + \frac{A_q}{\|\omega_{q-1}\|}\right). \tag{27}$$

Puisque S^{μ_B} est semi-continue supérieurement en ξ_0, il existe un $\varrho_1 \in]0, \frac{1}{2}\pi[$ tel que

$$S^{\mu_B}(\xi) < S^{\mu_B}(\xi_0) + \varepsilon < 2\varepsilon \quad \text{pour tout} \quad \xi \in C(\xi_0, \varrho_1). \tag{28}$$

En somme nous avons démontré:

Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un disque sphérique ouvert B de centre ξ_0, et un $\varrho_0 \in]0, \frac{1}{2}\pi[$ tels que $\xi \in C(\xi_0, \varrho_0)$ entraîne $|S^{\mu_B}(\xi)| < \frac{1}{3}\varepsilon$.

Par suite pour $\xi \in C(\xi_0, \varrho_0)$ on a

$$|S^{\mu}(\xi) - S^{\mu}(\xi_0)| \leqq |S^{\mu_{CB}}(\xi) - S^{\mu_{CB}}(\xi_0)| + |S^{\mu_B}(\xi)| + |S^{\mu_B}(\xi_0)| < \varepsilon,$$

si

$$|S^{\mu_{CB}}(\xi) - S^{\mu_{CB}}(\xi_0)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon,$$

ce qui est remplit dans un voisinage de ξ_0. La continuité de S^{μ} en ξ_0 est démontrée. /

COROLLAIRE 4.13. *Soient $a \in \Omega_q$, $\varrho \in]0, \frac{1}{2}\pi[$ et σ_ϱ la mesure de surface ordinaire sur le cercle sphérique $S(a, \varrho)$. Alors le potentiel sphérique S^{σ_ϱ} est continu sur Ω_q.*

Démonstration: Nous supposons $q \geqq 3$. La mesure σ_ϱ est invariante par rapport au groupe $O(q, a)$ (cf. le lemme 4.1), ce qui montre la constance de S^{σ_ϱ} sur $S(a, \varrho)$. Cette constante est finie parce que

$$g_q(t)(1 - t^2)^{\frac{1}{2}(q-4)}$$

est intégrable sur $[-1, 1]$ d'après 3.3. La restriction de S^{σ_ϱ} à $S(a, \varrho)$ est par conséquent continue en tout point de $S(a, \varrho)$, ce qui entraîne la continuité de S^{σ_ϱ}. /

Le noyau sphérique $\eta \mapsto g_q(\xi \cdot \eta)$ est surharmonique dans l'ouvert $\{\eta \in \Omega_q \mid \xi \cdot \eta > 0\}$ et sousharmonique dans l'ouvert $\{\eta \in \Omega_q \mid \xi \cdot \eta < 0\}$ en vertu de 3.5 et de 4.9.

Le noyau classique $y \mapsto -\|x - y\|^{2-q}$ est sousharmonique dans tout l'espace $\mathbf{R}^q$.

À cause de cette différence un potentiel sphérique n'est pas nécessairement sousharmonique, mais nous allons démontrer que cette défaut disparaît, si on considère seulement des mesures positives admettant 0 pour barycentre.

LEMME 4.14. *Pour tout $\varrho \in]0, \frac{1}{2}\pi[$ il existe une constante réelle k_ϱ telle que pour tout $a, \xi \in \Omega_q$, on ait*

$$\mathscr{M}^{\varrho}_{g_q(\xi \cdot\ )}(a) - \cos\varrho\, g_q(\xi \cdot a) \geqq k_\varrho \xi \cdot a.$$

Démonstration: (a) *Soit* $q = 2$. Écrivons $a = e^{i\alpha}$ et $\xi = e^{i\varphi}$ où $\alpha, \varphi \in [0, 2\pi[$. Alors $a \cdot \xi = \cos(\alpha - \varphi)$. Le membre gauche de l'inégalité cherchée est

$$\tfrac{1}{2}g_2(\cos(\alpha-\varphi+\varrho))+\tfrac{1}{2}g_2(\cos(\alpha-\varphi-\varrho))-\cos\varrho\, g_2(\cos(\alpha-\varphi)),$$

et en utilisant la formule

$$g_2(\cos\theta)=\frac{1}{\pi}((\pi-\theta)\sin\theta-\tfrac{1}{2}\cos\theta)$$

on le réduit sans peine à

$$-\frac{\varrho\sin\varrho}{\pi}\cos(\alpha-\varphi),$$

ce qui démontre l'inégalité, étant une égalité avec

$$k_\varrho=-\frac{\varrho\sin\varrho}{\pi}.$$

(b) *Soit* $q \geqq 3$. Pour des $a\in\Omega_q$ et $\varrho\in\,]0,\tfrac{1}{2}\pi[$ fixes, nous considérons la fonction de Ω_q dans $\mathbf{R}$ donnée par

$$\xi\mapsto \mathscr{M}^{\varrho}_{g_q(\xi\,\cdot\,)}(a).$$

Elle ne dépend que de $a\cdot\xi$. Puisqu'on a

$$\mathscr{M}^{\varrho}_{g_q(\xi\,\cdot\,)}(a)=\frac{\sin^{2-q}\varrho}{\|\omega_{q-1}\|}\int\limits_{S(a,\varrho)} g_q(\xi\cdot\eta)\,d\sigma_\varrho(\eta)=\sin^{2-q}\varrho\, S^{\sigma_\varrho}(\xi),$$

on conclut que la fonction considérée est continue dans Ω_q, indéfiniment dérivable dans $\Omega_q\setminus S(a,\varrho)$, et là satisfaisant à

$$D^*_{\xi\, q}\{\mathscr{M}^{\varrho}_{g_q(\xi\,\cdot\,)}(a)\}=\frac{\sin^{2-q}\varrho}{\|\omega_{q-1}\|}\int\limits_{S(a,\varrho)} D^*_{\xi\, q}\{g_q(\xi\cdot\eta)\}\,d\sigma_\varrho(\eta)$$

$$=\frac{-q\sin^{2-q}\varrho}{\|\omega_q\|}\int\limits_{S(a,\varrho)}(\xi\cdot\eta)\,d\sigma_\varrho(\eta)=\frac{-q\|\omega_{q-1}\|\cos\varrho}{\|\omega_q\|}a\cdot\xi$$

en vertu de 3.5.

Par conséquent, si nous posons $s=\cos\varrho$, $t=a\cdot\xi$ et considérons la fonction $f_s:[-1,1]\to\mathbf{R}$ donnée par

$$f_s(t)=\mathscr{M}^{\varrho}_{g_q(\xi\,\cdot\,)}(a),$$

nous savons que f_s est une fonction continue dans $[-1,1]$, indéfiniment dérivable dans $]-1,s[$ et $]s,1[$, et là satisfaisant à

$$(1-t^2)f_s''(t)-(q-1)tf_s'(t)+(q-1)f_s(t) = \frac{-q(q-1)\|\omega_{q-1}\|s}{\|\omega_q\|}t. \quad (29)$$

D'après 3.7 on sait que $-s\check{g}_q(t)$ et $sg_q(t)$ sont des solutions de (29) dans $]-1,1[$, donc tous les solutions de (29) sont données d'une part comme

$$-s\check{g}_q(t)+c_1t+c_2\varphi_q(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R}, \quad (30)$$

d'autre part comme

$$sg_q(t)+d_1t+d_2\varphi_q(t), \quad d_1, d_2 \in \mathbf{R}, \quad (31)$$

où φ_q est la solution du lemme 3.6. Par conséquent il existe des constantes $c_1, c_2, d_1, d_2, \in \mathbf{R}$ telles que

$$f_s(t) = -s\check{g}_q(t)+c_1t+c_2\varphi_q(t) \qquad \text{pour} \quad t \in]s,1[, \quad (32)$$

$$f_s(t) = sg_q(t)+d_1t+d_2\varphi_q(t) \qquad \text{pour} \quad t \in]-1,s[. \quad (33)$$

Faisant $t \to 1$ dans (32) et $t \to -1$ dans (33), nous concluons $c_2 = d_2 = 0$ d'après les propriétés de f_s, g_q et φ_q. Faisant $t \to s$, nous obtenons

$$f_s(s) = -s\check{g}_q(s)+c_1s = sg_q(s)+d_1s,$$

donc

$$c_1-d_1 = g_q(s)+\check{g}_q(s) = h_q(s)$$

avec la notation de 3.7, et il en résulte que

$$f_s(t)-sg_q(t) = \begin{cases} d_1t+th_q(s)-sh_q(t) & \text{pour} \quad s \leqq t \leqq 1, \\ d_1t & \text{pour} \quad -1 \leqq t \leqq s, \end{cases} \quad (34)$$

où

$$d_1 = \frac{f_s(s)}{s}-g_q(s) = \frac{1}{s}\frac{\|\omega_{q-2}\|}{\|\omega_{q-1}\|}\int_{-1}^{1} g_q(s^2+(1-s^2)\theta)(1-\theta^2)^{\frac{1}{2}(q-4)}\,d\theta - g_q(s).$$

La formule (34) montre le lemme avec $k_\varrho = d_1$, $s = \cos\varrho$ et $t = a\cdot\xi$, parce que $0 \leqq s \leqq t$ entraîne $th_q(s)-sh_q(t) \geqq 0$ en vertu du lemme 3.7. /

THÉORÈME 4.15. *Soit μ une mesure positive sur Ω_q admettant 0 pour barycentre. Alors on a:*

(i) *Le potentiel sphérique S^μ de μ est sousharmonique dans Ω_q, harmonique dans le complémentaire du support de μ.*

(ii) *Au sens de distribution on a $D_q^* S^\mu = \mu$.*

Démonstration: (i) Pour établir la sousharmonicité de S^μ il reste à montrer la condition (iii) de la définition. Soient $a \in \Omega_q$, $\varrho \in \left]0, \tfrac{1}{2}\pi\right[$. Grâce au théorème de Fubini on a

$$\mathscr{M}^\varrho_{S^\mu}(a) = \frac{1}{\|\omega_{q-1}\|} \int_{\Omega_q} \mathscr{M}^\varrho_{g_q(\xi\,\cdot\,)}(a)\, d\mu(\xi),$$

et par suite

$$\mathscr{M}^\varrho_{S^\mu}(a) - \cos\varrho\, S^\mu(a) = \frac{1}{\|\omega_{q-1}\|} \int_{\Omega_q} \left\{\mathscr{M}^\varrho_{g_q(\xi\,\cdot\,)}(a) - \cos\varrho\, g_q(\xi\cdot a)\right\} d\mu(\xi)$$

$$\geqq \frac{k_\varrho}{\|\omega_{q-1}\|} \int_{\Omega_q} a\cdot\xi\, d\mu(\xi) = 0,$$

à cause du lemme 4.14. Nous avons déja observé que

$$S^\mu \in C^\infty(\Omega_q \setminus \operatorname{supp}(\mu)),$$

et si $\xi \in \Omega_q \setminus \operatorname{supp}(\mu)$ on trouve

$$D_q^* S^\mu(\xi) = \frac{1}{\|\omega_{q-1}\|} \int_{\operatorname{supp}(\mu)} D^*_{\xi\, q} \{g_q(\xi\cdot\eta)\}\, d\mu(\eta) = \frac{-q}{\|\omega_q\|} \int_{\operatorname{supp}(\mu)} \xi\cdot\eta\, d\mu(\eta) = 0,$$

ce qui par 4.6 entraîne l'harmonicité de S^μ dans le complémentaire du support de μ.

(ii) Soit $\mu \sim \sum_{n=0}^\infty S_n$ le développement de μ en série de fonctions sphériques. Le barycentre de μ est 0 si et seulement si $S_1 = 0$. D'après 2.12, 2.14 on sait que $D_q^* S^\mu = D_q^*(g_q * \mu)$ a le développement $S_0 + \sum_{n=2}^\infty S_n$, égal à celui de μ, donc $\mu = D_q^* S^\mu$. /

La proposition suivante est une généralisation du théorème 4.9.

PROPOSITION 4.16. *Soit $T \in \mathscr{D}'(\Omega_q)$ une distribution sur Ω_q. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *La distribution $D_q^* T$ est positive.*

(ii) *La distribution T est une fonction sousharmonique.*

Démonstration: Nous montrons d'abord que (i) entraîne (ii). D'après 2.3 on sait que $D_q^* T$ est une mesure positive, posons $\mu = D_q^* T$. Soit $T \sim \sum_{n=0}^\infty S_n$ le développement de la distribution T en série de fonctions sphériques. Alors μ a le développement

$$\mu \sim \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{(n-1)(n+q-1)}{q-1} S_n.$$

Dans ce développement le terme avec $n = 1$ est égal à 0, donc μ admet 0 pour barycentre. Par conséquent le potentiel sphérique S^μ de μ est sousharmonique dans Ω_q, et comme S_1 est harmonique, $S^\mu + S_1$ est de même sousharmonique dans Ω_q. Puisque $S^\mu + S_1$ a le même développement comme T, on sait que T est égal à la distribution définie par $S^\mu + S_1$, i.e. T est une fonction sousharmonique dans Ω_q.

Ensuite, soit T une fonction sousharmonique dans Ω_q. Nous allons démontrer que $D_q^* T \geqq 0$. Si T est de la classe C^2, l'assertion est déja prouvée (4.9). Dans le cas général nous nous servirons du procédé de la régularisation du chapitre 2. Soit $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0,1[}$ une unité approchée de Ω_q, alors nous avons pour tout $a \in \Omega_q$, $\varrho \in]0, \frac{1}{2}\pi[$

$$\mathscr{M}^\varrho_{\varphi_\varepsilon * T}(a) = \varphi_\varepsilon * \mathscr{M}^\varrho_T(a), \tag{35}$$

car, grâce au théorème de Fubini on a

$$\mathscr{M}^\varrho_{\varphi_\varepsilon * T}(a) = \frac{\sin^{2-q}\varrho}{\|\omega_{q-1}\|^2} \int_{\Omega_q} \left(T(\eta) \int_{S(a,\varrho)} \varphi_\varepsilon(\xi \cdot \eta)\, d\sigma_\varrho(\xi) \right) d\omega_q(\eta)$$

$$= \frac{\sin^{2-q}\varrho}{\|\omega_{q-1}\|^2} \int_{\Omega_q} \left(T(\eta) \int_{S(\eta,\varrho)} \varphi_\varepsilon(a \cdot \zeta)\, d\sigma_\varrho(\zeta) \right) d\omega_q(\eta) = \frac{1}{\|\omega_{q-1}\|} \int_{\Omega_q} T(\eta) \mathscr{M}^\varrho_{\varphi_\varepsilon(a\,\cdot\,)}(\eta)\, d\omega_q(\eta),$$

et à l'aide du lemme 4.2 on conclut

$$\mathscr{M}^\varrho_{\varphi_\varepsilon * T}(a) = \frac{1}{\|\omega_{q-1}\|} \int_{\Omega_q} \mathscr{M}^\varrho_T(\eta)\, \varphi_\varepsilon(a \cdot \eta)\, d\omega_q(\eta) = \varphi_\varepsilon * \mathscr{M}^\varrho_T(a).$$

La formule (35) entraîne la sousharmonicité dans Ω_q de la régularisée $\varphi_\varepsilon * T$, parce que

$$\mathscr{M}^\varrho_{\varphi_\varepsilon * T}(a) = \frac{1}{\|\omega_{q-1}\|} \int_{\Omega_q} \varphi_\varepsilon(a \cdot \eta)\, \mathscr{M}^\varrho_T(\eta)\, d\omega_q(\eta)$$

$$\geqq \frac{1}{\|\omega_{q-1}\|} \int_{\Omega_q} \varphi_\varepsilon(a \cdot \eta) \cos\varrho\, T(\eta)\, d\omega_q(\eta) = \cos\varrho\, \varphi_\varepsilon * T(a).$$

Comme $\varphi_\varepsilon * T \in C^\infty(\Omega_q)$ nous savons que $D_q^*(\varphi_\varepsilon * T) \geqq 0$, et en faisant $\varepsilon \to 0$, nous obtenons que $D_q^* T \geqq 0$. /

Voici le théorème analogue au théorème de représentation de F. Riesz dans la théorie du potentiel classique.

THÉORÈME 4.17. *Quel que soit la fonction sousharmonique f dans Ω_q, il existe une représentation de f et une seule comme*

$$f(\xi) = S^\mu(\xi) + h(\xi), \qquad \xi \in \Omega_q,$$

où S^μ est le potentiel sphérique d'une mesure positive μ admettant 0 pour barycentre, et h est une fonction harmonique dans Ω_q.

La mesure μ est appelée la mesure associée à f, et on a $\mu = D_q^* f$ au sens de distribution.

La fonction h est appelée la fonction harmonique associée à f, et on a $h(\xi) = \mathscr{S}(f) \cdot \xi$, où $\mathscr{S}(f)$ est le point de $\mathbf{R}^q$ determiné par l'intégrale vectorielle

$$\mathscr{S}(f) = \frac{q}{\|\omega_q\|} \int_{\Omega_q} \eta f(\eta)\, d\omega_q(\eta).$$

On en conclut que f est le potentiel sphérique d'une mesure positive admettant 0 pour barycentre si et seulement si $\mathscr{S}(f) = 0$, et que f est harmonique si et seulement si la mesure associée est la mesure nulle.

Démonstration: Soit $f = S^\mu + h$ une représentation avec les propriétés désirées. D'après 4.6 et 4.15 on a donc

$$D_q^* f = D_q^* S^\mu + D_q^* h = \mu,$$

ce qui montre l'unicité de la représentation.

L'existence s'établit ainsi: D'après 4.16 on sait que $\mu = D_q^* f$ est une mesure positive admettant 0 pour barycentre. Soit $f \sim \sum_{n=0}^\infty S_n$ le développement de f en série de fonctions sphériques. Alors on a

$$S_1(\xi) = \frac{N(q,1)}{\|\omega_q\|} \int_{\Omega_q} p_1(q, \xi \cdot \eta) f(\eta)\, d\omega_q(\eta) = \mathscr{S}(f) \cdot \xi,$$

où nous avons posé

$$\mathscr{S}(f) = \frac{q}{\|\omega_q\|} \int_{\Omega_q} \eta f(\eta)\, d\omega_q(\eta).$$

La fonction $S_1(\xi)$ est harmonique, et on voit que f et $S^\mu + S_1$ possèdent le même développement en série de fonctions sphériques. Donc f et $S^\mu + S_1$ sont égaux ω_q-presque partout, et tous les deux sont des fonctions sousharmoniques. En vertu du corollaire 4.8 on conclut que f est identique à $S^\mu + S_1$. /

COROLLAIRE 4.18. *Les applications $f \mapsto D_q^* f$ et $\mu \mapsto S^\mu$ établissent une correspondance biunivoque entre les fonctions sousharmoniques f satisfaisant à $\mathscr{S}(f) = 0$, et les mesures positives μ de barycentre à l'origine.*

Chapitre 5

CORPS CONVEXES ET POTENTIELS SPHÉRIQUES

Nous allons expliquer la liaison entre la théorie du potentiel sphérique et la théorie des corps convexes.

THÉORÈME 5.1. *La fonction d'appui h_K d'un corps convexe quelconque $K \in \mathscr{C}_q$ est une fonction sousharmonique dans Ω_q.*

La mesure associée à h_K est égale à la première mesure de surface de K, i.e.

$$D_q^* h_K = \mu_1(K) \quad ou \quad \{\Delta_q^* + (q-1)\} h_K = (q-1)\mu_1(K) \tag{1}$$

au sens des distributions.

La fonction harmonique associée à h_K est la fonction $\xi \mapsto \mathscr{S}(K)\cdot\xi$ où $\mathscr{S}(K) = \mathscr{S}(h_K)$ est le point de Steiner de K donné par

$$\mathscr{S}(K) = \frac{q}{\|\omega_q\|}\int_{\Omega_q} \eta h_K(\eta)\, d\omega_q(\eta). \tag{2}$$

Nous avons la représentation suivante:

$$h_K(\xi) = \frac{1}{\|\omega_{q-1}\|}\int_{\Omega_q} g_q(\xi\cdot\eta)\, d\mu_1(K)(\eta) + \mathscr{S}(K)\cdot\xi, \quad pour \ \ \xi \in \Omega_q. \tag{3}$$

Démonstration: Soient $a \in \Omega_q$, $\varrho \in]0, \frac{1}{2}\pi[$ et soit

$$\eta \in \Omega_{q-1}, \text{ où } \Omega_{q-1} = \{\xi \in \Omega_q \mid a\cdot\xi = 0\}.$$

La convexité et l'homogénéité positive de h_K montrent que

$$\cos\varrho\, h_K(a) \leqq \tfrac{1}{2} h_K(a\cos\varrho + \eta\sin\varrho) + \tfrac{1}{2} h_K(a\cos\varrho - \eta\sin\varrho).$$

Formant la moyenne en η sur Ω_{q-1}, on obtient

$$\cos\varrho\, h_K(a) \leqq \tfrac{1}{2}\mathscr{M}^{\varrho}_{h_K}(a) + \tfrac{1}{2}\mathscr{M}^{\varrho}_{h_K}(a) = \mathscr{M}^{\varrho}_{h_K}(a),$$

donc h_K est sousharmonique dans Ω_q.

Si $K \in \mathscr{C}_q$ est un corps convexe lisse, nous savons d'après (10) chapitre 2 que la mesure associée à h_K est égale à $\mu_1(K)$.

Soit $K \in \mathscr{C}_q$ un corps convexe quelconque. Il existe une suite $K_n \in \mathscr{C}_q$ de corps convexes lisses telle que $K_n \to K$ dans $\mathscr{C}_q$, donc $h_{K_n} \to h_K$ dans $\mathscr{C}(\Omega_q)$. Il en découle que $h_{K_n} \to h_K$ faiblement au sens des distributions (i.e. dans $\mathscr{D}'(\Omega_q)$), et par conséquent $D_q^* h_{K_n} \to D_q^* h_K$ dans $\mathscr{D}'(\Omega_q)$. D'après 1.2 on sait que $\mu_1(K_n) \to \mu_1(K)$ dans $\mathscr{M}(\Omega_q)$, et en particulier $\mu_1(K_n) \to \mu_1(K)$ dans $\mathscr{D}'(\Omega_q)$. Puisque $D_q^* h_{K_n} = \mu_1(K_n)$, il en découle que $D_q^* h_K = \mu_1(K)$ au sens des distributions.

Le théorème de représentation 4.17 finit la démonstration. /

THÉORÈME 5.2. *Deux corps convexes $K, L \in \mathscr{C}_q$ ont la même première mesure de surface, si et seulement si l'un résulte de l'autre par une translation.*

Ce théorème – d'ailleurs bien connu – est une conséquence immédiate du théorème 5.1 combiné avec les observations du chapitre 1. Le théorème remonte à E. B. Christoffel pour des corps convexes lisses dans l'espace de trois dimensions. De plus il est un cas particulier d'un théorème dû à A. D. Aleksandrov [2], et à W. Fenchel et B. Jessen [7].

Remarquons que nous n'avons pas supposé la dimension de K et L au moins 2, comme fait dans [7]. Cependant, cette extension n'est pas profonde.

THÉORÈME 5.3. *Pour qu'une mesure positive μ sur la sphère unité Ω_q soit la première mesure de surface d'un corps convexe, il faut et il suffit qu'elle satisfasse aux conditions suivantes:*

(i) *La mesure μ admet 0 pour barycentre.*

(ii) *Le potentiel sphérique S^μ de μ est une fonction d'appui sur Ω_q.*

Démonstration: Les conditions sont nécessaires; la condition (i) en vertu de 1.2 et la condition (ii) en vertu de 5.1.

Pour montrer qu'elles sont suffisantes, remarquons que S^μ, étant une fonction d'appui, détermine un corps convexe K et un seul tel que $h_K = S^\mu$. La première mesure de surface $\mu_1(K)$ de K est alors

$$\mu_1(K) = D_q^* h_K = D_q^* S^\mu = \mu$$

en vertu de 5.1 et 4.15. /

On voit facilement qu'il y a identité entre les fonctions d'appui sur Ω_2 et les fonctions sousharmoniques dans Ω_2. La condition (ii) est par conséquent vide quand $q = 2$.

D'après les théorèmes 5.2 et 5.3 l'application μ_1 établit une correspondance biunivoque entre l'ensemble $\mathscr{C}'_q$ des corps convexes dont le point de Steiner est à l'origine et l'ensemble $\mathscr{P}$ des mesures positives sur Ω_q satisfaisant à (i) et (ii). Cette correspondance est additive et positivement homogène, et de plus on a:

THÉORÈME 5.4. *L'application* $\mu_1 : \mathscr{C}'_q \to \mathscr{P}$ *est un homéomorphisme, et* $\mathscr{P}$ *est un cône convexe fermé de* $\mathscr{M}_+(\Omega_q)$.

Démonstration: Puisque μ_1 est continue et positivement homogène, il suffit de démontrer que l'ensemble

$$\mathscr{A} = \{K \in \mathscr{C}'_q \mid \|\mu_1(K)\| = 1\}$$

est compact.

On voit immédiatement que $\mathscr{A}$ est fermé dans $\mathscr{C}_q$.

Pour tout $K \in \mathscr{A}$ et tout point $a \in K$, le segment $[0,a]$ est contenu dans K parce que $0 = \mathscr{S}(K) \in K$. Alors

$$\|\mu_1([0, a])\| \leqq \|\mu_1(K)\| = 1$$

Comme

$$\|\mu_1([0, a])\| = \frac{\|\omega_{q-1}\|}{q-1} \|a\|,$$

on voit que $\|a\|$ et par conséquent $\mathscr{A}$ est borné. Le théorème de sélection de Blaschke fournit la compacité de $\mathscr{A}$. /

Soient $K \in \mathscr{C}_q$ un corps convexe, $\mu_p(K)$, $p = 1, \cdots, q-1$, ses mesures de surface. Les mesures $\mu_1(K)$ et $\mu_{q-1}(K)$ sont caractérisées par leurs potentiels sphériques, étant resp. des fonctions d'appui et des fonctions sousharmoniques. Nous croyons qu'il serait fertile de chercher la caractérisation des mesures $\mu_p(K)$, $p = 2, \cdots, q-2$, par leurs potentiels sphériques $S^{\mu_p(K)}$.

Bibliographie

[1] ALEKSANDROV, A. D. – Zur Theorie der gemischten Volumina von konvexen Körpern I, II. (En russe, résumé en allemand.) *Mat. Sbornik N. S.*, 2, 1937, pp. 947–972, 1205–1238.

[2] ALEKSANDROV, A. D. – Zur Theorie der gemischten Volumina von konvexen Körpern III. (En russe, résumé en allemand.) *Mat. Sbornik N. S.*, 3, 1938, pp. 27–46.

[3] BONNESEN, T. et FENCHEL, W. – *Theorie der konvexen Körper.* Springer, Berlin 1934.

[4] BOURBAKI, N. – *Intégration, chap. 1–4.* Hermann, Paris 1965.

[5] BRELOT, M. – *Axiomatique des fonctions harmoniques.* Les presses de l'université de Montréal. 1966.

[6] BRELOT, M. – *Éléments de la théorie classique du potentiel.* Les cours de Sorbonne. Paris 1965.

[7] FENCHEL, W. et JESSEN, B. – Mengenfunktionen und konvexe Körper. *Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. Mat.-fys. Meddelelser* XVI, 3, 1938.

[8] FIREY, W. J. – The determination of convex bodies from their mean radius of curvature functions. *Mathematika* 14, 1967, pp. 1–13.

[9] FIREY, W. J. – Christoffel's problem for general convex bodies. *Mathematika* 15, 1968, pp. 7–21.

[10] GRÜNBAUM, B. – *Convex polytopes.* J. Wiley. New York 1967.

[11] HELGASON, S. – *Differential geometry and symmetric spaces.* Academic Press. New York 1962.

[12] HELLWIG, G. – *Partielle Differentialgleichungen.* Teubner. Stuttgart 1960.

[13] HERVÉ, R. M. – Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 12, 1962, pp. 415–571.

[14] LENSE, J. – *Kugelfunktionen.* Akademische Verlagsgesellschaft. Leipzig 1950.

[15] MÜLLER, C. – Spherical harmonics. *Lecture notes in mathematics 17.* Springer. New York 1966.

[16] POGORELOV, A. V. – On the question of the existence of a convex surface with a given sum of the principal radii of curvature. *Uspehi Mat. Nauk, 8*, 1953, pp. 127–130. (En russe.)

[17] RHAM, G. de – *Variétés différentiables.* Hermann. Paris 1955.

[18] STEINER, J. – Von dem Krümmungsschwerpunkte ebener Curven. *J. Reine Angew. Math.*, 21, 1840, pp. 33–63, 101–133.

Indleveret til Selskabet den 12. december 1968.
Færdig fra trykkeriet den 19. september 1969.